2020\2021

Zadania matura podstawa (otwarte)

1.Nierówności Kwadratowe

Zadanie 1. [2015 czerwiec NF, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 9x \leq x - 3$.

Zadanie 2. [2015 czerwiec NF, zad. 27. (2 pkt)]

Rozwiąż równanie $x\left(x^2 - 2x + 3\right) = 0$.

Zadanie 3. [2015 maj NF, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $2x^2 - 4x > (x+3)(x-2)$.

Zadanie 4. [2015 sierpień NF, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż równanie $\frac{2x-4}{x} = \frac{x}{2x-4}$, gdzie $x \neq 0$ i $x \neq 2$.

Zadanie 5. [2015 sierpień NF, zad. 28. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $20x \geq 4x^2 + 24$.

Zadanie 6. [2015 sierpień SF, zad. 27. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $5x^2 - 45 \leq 0$.

Zadanie 7. [2016 czerwiec NF, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż równanie $\frac{2x+1}{2x} = \frac{2x+1}{x+1}$, gdzie $x \neq -1$ i $x \neq 0$.

Zadanie 8. [2016 maj NF, zad. 27. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $2x^2 - 4x > 3x^2 - 6x$.

Zadanie 9. [2016 maj NF, zad. 28 (2 pkt)]

Rozwiąż równanie $(4-x)\left(x^2 + 2x - 15\right) = 0$.

Zadanie 10. [2016 maj SF, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $2x^2+5x-3>0$.

Zadanie 11. [2016 sierpień NF, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $3x^2-6x\geq(x-2)(x-8)$.

Zadanie 12. [2017 czerwiec NF i SF, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $\left(x-\frac{1}{2}\right)x>3\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$.

Zadanie 13. [2017 maj NF i SF, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $8x^2-72x\leq 0$.

Zadanie 14. [2017 sierpień NF i SF, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $2x^2+x-6\leq 0$.

Zadanie 15. [2017 sierpień NF i SF, zad. 27. (2 pkt)]

Rozwiąż równanie $\left(x^2-6\right)\left(3x+2\right)=0$.

Zadanie 16. [2018 czerwiec NF i SF, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $2x\left(1-x\right)+1-x<0$.

Zadanie 17. [2018 maj NF i SF, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $2x^2-3x>5$.

Zadanie 18. [2018 maj NF, zad. 27. (2 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Rozwiąż równanie $\left(x^3+125\right)\left(x^2-64\right)=0$.

Zadanie 19. [2018 sierpień NF i SF, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $x^2+6x-16<0$.

Zadanie 20. [2018 sierpień NF i SF, zad. 27. (2 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Rozwiąż równanie $(x^3+27)(x^2-16)=0$.

Zadanie 21. [2019 maj NF, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż równanie $(x^3-8)(x^2-4x-5)=0$.

Zadanie 22. [2019 maj NF, zad. 27. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $3x^2-16x+16>0$.

Zadanie 23. [2019 maj SF, zad. 26. (2 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Rozwiąż równanie $x^3-5x^2-9x+45=0$.

Zadanie 24. [2019 czerwiec NF, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $x(7x+2)>7x+2$.

Zadanie 25. [2019 czerwiec NF, zad. 27. (2 pkt)]

Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x, które spełniają warunek: $\frac{3x^2-8x-3}{x-3}=x-3$.

Zadanie 26. [2019 sierpień, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż równanie $(x^2-16)(x^3-1)=0$.

Zadanie 27. [2019 sierpień, zad. 27. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $2x^2-5x+3\le 0$.

Zadanie 28. [2020 maj, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność $2(x-1)(x+3)>x-1$.

Zadanie 29. [2020 maj, zad. 27. (2 pkt)]

Rozwiąż równanie $\left(x^2-1\right)\left(x^2-2x\right)=0$.

Zadanie 30. [2020 sierpień, zad. 26. (2 pkt)]

Rozwiąż nierówność:

$$-2x^2+5x+3\le 0.$$

Zadanie 31. [2020 sierpień, zad. 30. (2 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Rozwiąż równanie $(x^3+8)(x^2-9)=0$.

2. Funkcja kwadratowa

Zadanie 1. [2015 czerwiec NF, zad. 30. (2 pkt)]

Funkcja kwadratowa, f dla $x=-3$ przyjmuje wartość największą równą 4. Do wykresu funkcji f należy punkt $A=(-1,3)$. Zapisz wzór funkcji kwadratowej f.

Zadanie 2. [2015 maj NF, zad. 29. (2 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji kwadratowej $f(x)=x^2-6x+3$ w przedziale $\langle 0,4\rangle$.

Zadanie 3. [2015 sierpień NF, zad. 34. (5 pkt)]

Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x)=ax^2+bx+c$. Zbiorem rozwiązań nierówności $f(x)>0$ jest przedział $(0,12)$. Największa wartość funkcji f jest równa 9. Oblicz współczynniki a, b i c funkcji f.

Zadanie 4. [2016 sierpień NF i SF, zad. 29. (2 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Funkcja kwadratowa jest określona wzorem $f(x)=x^2-11x$. Oblicz najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle -6, 6\rangle$.

Zadanie 5. [2017 maj NF i SF, zad. 29. (4 pkt)]

Funkcja kwadratowa f jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych x wzorem $f(x)=ax^2+bx+c$. Największa wartość funkcji f jest równa 6 oraz $f(-6)=f(0)=\frac{3}{2}$. Oblicz wartość współczynnika a.

Zadanie 6. [2017 sierpień NF i SF, zad. 32. (4 pkt)]

Funkcja kwadratowa $f(x)=ax^2+bx+c$ ma dwa miejsca zerowe $x_1=-2$ i $x_2=6$. Wykres funkcji f przechodzi przez punkt $A=(1,-5)$. Oblicz najmniejszą wartość funkcji f.

Zadanie 7. [2018 czerwiec NF i SF, zad. 27. (2 pkt)]

Wykresem funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x)=x^2+bx+c$ jest parabola, na której leży punkt $A=(0,-5)$. Osią symetrii tej paraboli jest prosta o równaniu $x=7$. Oblicz wartości współczynników b i c.

Zadanie 8. [2018 maj NF i SF, zad. 30. (2 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Do wykresu funkcji wykładniczej, określonej dla każdej liczby rzeczywistej x wzorem $f(x)=a^x$ (gdzie $a>0$ i $a\neq 1$), należy punkt $P=(2,9)$. Oblicz a i zapisz zbiór wartości funkcji g, określonej wzorem $g(x)=f(x)-2$.

3. Trygonometria

Zadanie 1. [2015 sierpień NF i SF, zad. 29. (2 pkt)]

Kąt α jest ostry i spełnia równość $\text{tg}\alpha+\frac{1}{\text{tg}\alpha}=\frac{7}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

Zadanie 2. [2016 maj SF, zad. 28. (2 pkt)]

Kąt α jest ostry i $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \frac{3}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

Zadanie 3. [2017 czerwiec NF i SF, zad. 27. (2 pkt)]

Kąt α jest ostry i spełniona jest równość $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

Zadanie 4. [2018 czerwiec NF i SF, zad. 30. (2 pkt)]

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Zadanie 5. [2020 maj NF i SF, zad. 31. (2 pkt)]

Kąt α jest ostry i spełnia warunek $\frac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{\cos\alpha} = 4$. Oblicz tangens kąta α.

4. Ciągi

Zadanie 1. [2015 czerwiec NF, zad. 32. (4 pkt)]

Dany jest nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny (a_n), dla $n \geq 1$ taki, że $a_5 = 18$. Wyrazy a_1, a_3 oraz a_{13} tego ciągu są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem pewnego ciągu geometrycznego. Wyznacz wzór na n-ty wyraz ciągu (a_n).

Zadanie 2. [2015 maj NF, zad. 34. (5 pkt)]

W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, suma jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 187. Średnia arytmetyczna pierwszego, trzeciego i dziewiątego wyrazu tego ciągu, jest równa 12. Wyrazy a_1, a_3, a_k ciągu (a_n), w podanej kolejności, tworzą nowy ciąg – trzywyrazowy ciąg geometryczny (b_n). Oblicz k.

Zadanie 3. [2015 sierpień SF, zad. 32. (4 pkt)]

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy $r \neq 0$ i pierwszym wyrazie $a_1 = 2$. Pierwszy, drugi i czwarty wyraz tego ciągu są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Oblicz iloraz tego ciągu geometrycznego.

Zadanie 4. [2016 czerwiec NF, zad. 31. (5 pkt)]

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, w którym $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2016$ oraz $a_5 + a_6 + a_7 + ... + a_{12} = 2016$. Oblicz pierwszy wyraz, różnicę oraz najmniejszy dodatni wyraz ciągu (a_n).

Zadanie 5. [2016 maj SF, zad. 31. (2 pkt)]

W skończonym ciągu arytmetycznym (a_n) pierwszy wyraz a_1 jest równy 7 oraz ostatni wyraz a_n jest równy 89. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 2016.
Oblicz, ile wyrazów ma ten ciąg.

Zadanie 6. [2016 sierpień NF i SF, zad. 31. (4 pkt)]

Ciąg arytmetyczny (a_n) określony jest wzorem $a_n = 2016 - 3n$, dla $n \geq 1$. Oblicz sumę wszystkich dodatnich wyrazów tego ciągu.

Zadanie 7. [2017 czerwiec NF i SF, zad. 30. (2 pkt)]

Suma trzydziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, jest równa 30. Ponadto $a_{30} = 30$. Oblicz różnicę tego ciągu.

Zadanie 8. [2017 maj NF i SF, zad. 31. (2 pkt)]

W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, dane są: wyraz $a_1 = 8$ i suma trzech początkowych wyrazów tego ciągu $S_3 = 33$. Oblicz różnicę $a_{16} - a_{13}$.

Zadanie 9. [2017 sierpień NF i SF, zad. 31. (2 pkt)]

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), określony dla $n \geq 1$, w którym spełniona jest równość $a_{21} + a_{24} + a_{27} + a_{30} = 100$. Oblicz sumę $a_{25} + a_{26}$.

Zadanie 10. [2018 czerwiec NF i SF, zad. 33. (4 pkt)]

W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla liczb naturalnych $n \geq 1$, wyraz szósty jest liczbą dwa razy większą od wyrazu piątego, a suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa $S_{10} = \frac{15}{4}$. Oblicz wyraz pierwszy oraz różnicę tego ciągu.

Zadanie 11. [2018 maj NF i SF, zad. 31. (2 pkt)]

Dwunasty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, jest równy 30, a suma jego dwunastu początkowych wyrazów jest równa 162. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

Zadanie 12. [2018 sierpień NF i SF, zad. 30. (2 pkt)]

Dziewiąty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, jest równy 34, a suma jego ośmiu początkowych wyrazów jest równa 110. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

Zadanie 13. [2019 maj NF, zad. 32. (4 pkt)]

Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Różnicą tego ciągu jest liczba $r = -4$, a średnia arytmetyczna początkowych sześciu wyrazów tego ciągu: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, jest równa 16.

a) Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

b) Oblicz liczbę k, dla której $a_k = -78$.

Zadanie 14. [2019 czerwiec NF i SF, zad. 30. (4 pkt)]

W ciągu geometrycznym przez S_n oznaczamy sumę n początkowych wyrazów tego ciągu, dla liczb naturalnych $n \geq 1$. Wiadomo, że dla pewnego ciągu geometrycznego: $S_1 = 2$ i $S_2 = 12$. Wyznacz iloraz i piąty wyraz tego ciągu.

Zadanie 15. [2019 sierpień NF i SF, zad. 32. (4 pkt)]

W ciągu arytmetycznym $(a_1, a_2, ..., a_{39}, a_{40})$ suma wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równa 1340, a suma wyrazów ciągu o numerach nieparzystych jest równa 1400. Wyznacz ostatni wyraz tego ciągu arytmetycznego.

Zadanie 16. [2020 maj NF i SF, zad. 33. (4 pkt)]

Wszystkie wyrazy ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla $n \geqslant 1$, są dodatnie. Wyrazy tego ciągu spełniają warunek $6a_1 - 5a_2 + a_3 = 0$. Oblicz iloraz q tego ciągu należący do przedziału $\left\langle 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2} \right\rangle$.

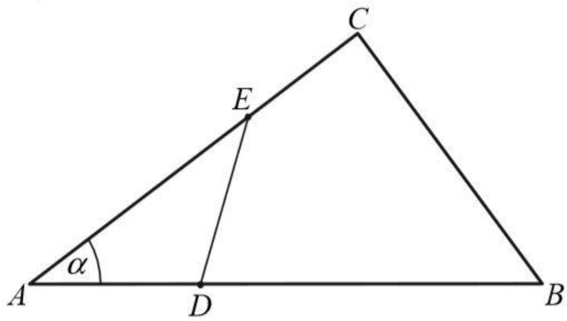
Zadanie 17. [2020 sierpień NF i SF, zad. 27. (2 pkt)]

Dany jest trzywyrazowy ciąg $(x+2,\ 4x+2,\ x+11)$. Oblicz wszystkie wartości x, dla których ten ciąg jest geometryczny.

5.Planimetria

Zadanie 1. [2016 czerwiec NF, zad. 30. (4 pkt)]

W trójkącie ABC dane są długości boków $|AB| = 15$ i $|AC| = 12$ oraz $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, gdzie $\alpha = \sphericalangle BAC$. Na bokach AB i AC tego trójkąta obrano punkty odpowiednio D i E takie, że $|BD| = 2|AD|$ i $|AE| = 2|CE|$ (zobacz rysunek).



Oblicz pole

a) trójkąta ADE.

b) czworokąta $BCED$.

Zadanie 2. [2016 maj NF i SF, zad. 32. (4 pkt)]

Jeden z kątów trójkąta jest trzy razy większy od mniejszego z dwóch pozostałych kątów, które różnią się o $50°$. Oblicz kąty tego trójkąta.

Zadanie 3. [2017 czerwiec NF i SF, zad. 32. (4 pkt)]

Ramię trapezu równoramiennego $ABCD$ ma długość $\sqrt{26}$. Przekątne w tym trapezie są prostopadłe, a punkt ich przecięcia dzieli je w stosunku $2:3$. Oblicz pole tego trapezu.

Zadanie 4. [2017 maj NF i SF, zad. 30. (2 pkt)]

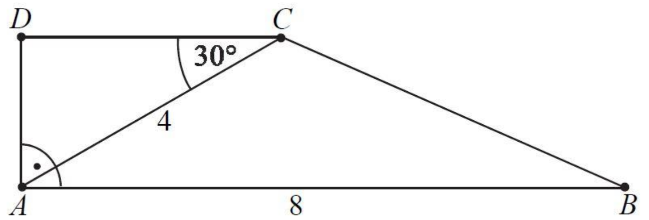
Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 26 cm, a jedna z przyprostokątnych jest o 14 cm dłuższa od drugiej. Oblicz obwód tego trójkąta.

Zadanie 5. [2018 sierpień NF i SF, zad. 34. (4 pkt)]

W trójkącie prostokątnym ACB przyprostokątna AC ma długość 5, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 2. Oblicz pole trójkąta ACB.

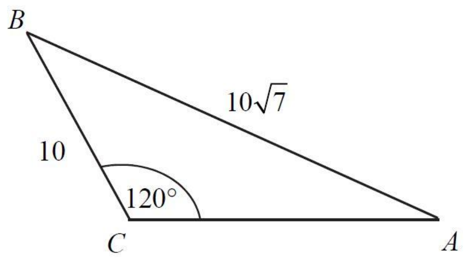
Zadanie 6. [2019 maj NF, zad. 31. (2 pkt)

W trapezie prostokątnym $ABCD$ dłuższa podstawa AB ma długość 8. Przekątna AC tego trapezu ma długość 4 i tworzy z krótszą podstawą trapezu kąt o mierze $30°$ (zobacz rysunek). Oblicz długość przekątnej BD tego trapezu.



Zadanie 7. [2019 czerwiec NF i SF, zad. 34. (4 pkt)]

Dany jest trójkąt rozwartokątny ABC, w którym $\sphericalangle ACB$ ma miarę $120°$. Ponadto wiadomo, że $|BC| = 10$ i $|AB| = 10\sqrt{7}$ (zobacz rysunek). Oblicz długość trzeciego boku trójkąta ABC.

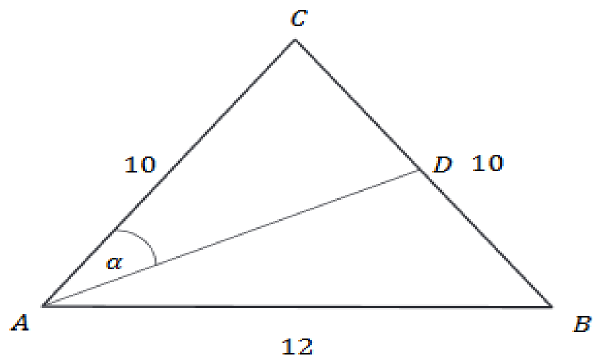


Zadanie 8. [2019 sierpień, zad. 33. (4 pkt)

Środek okręgu leży w odległości 10 cm od cięciwy tego okręgu. Długość tej cięciwy jest o 22 cm większa od promienia tego okręgu. Oblicz promień tego okręgu.

Zadanie 9. [2020 sierpień, zad. 32. (4 pkt)

Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym podstawa AB ma długość 12, a każde z ramion AC i BC ma długość równą 10. Punkt D jest środkiem ramienia BC (zobacz rysunek).



Oblicz sinus kąta α, jaki środkowa AD tworzy z ramieniem AC trójkąta ABC.

6. Geometria analityczna

Zadanie 1. [2015 czerwiec NF, zad. 33. (4 pkt)]

Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Ponadto wiadomo, że $A = (-2,4)$ i $B = (6,-2)$. Wierzchołek C należy do osi Oy. Oblicz współrzędne wierzchołka C.

Zadanie 2. [2015 maj NF, zad. 30. (2 pkt)]

W układzie współrzędnych są dane punkty $A = (-43,-12)$, $B = (50,19)$. Prosta AB przecina oś Ox w punkcie P. Oblicz pierwszą współrzędną punktu P.

Zadanie 3. [2015 sierpień NF, zad. 32. (4 pkt), zad. 33 SF]

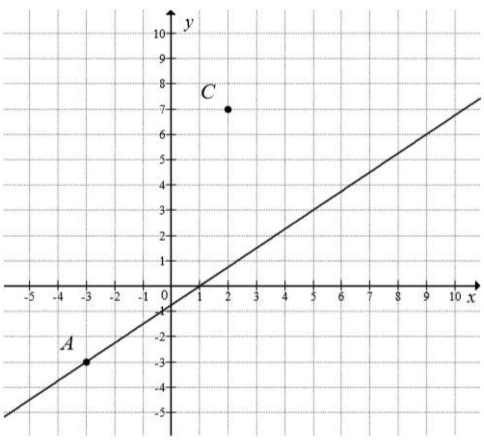
Wyznacz równanie osi symetrii trójkąta o wierzchołkach $A = (-2,2)$, $B = (6,-2)$, $C = (10,6)$.

Zadanie 4. [2016 czerwiec NF, zad. 27. (2 pkt)]

Dane są proste o równaniach $y = x + 2$ oraz $y = -3x + b$, które przecinają się w punkcie leżącym na osi Oy układu współrzędnych. Oblicz pole trójkąta, którego dwa boki zawierają się w danych prostych, a trzeci jest zawarty w osi Ox.

Zadanie 5. [2016 sierpień NF, zad. 32. (4 pkt)]

Na rysunku przedstawione są dwa wierzchołki trójkąta prostokątnego ABC: $A = (-3,-3)$ i $C = (2,7)$ oraz prosta o równaniu $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$, zawierająca przeciwprostokątną AB tego trójkąta.



Oblicz współrzędne wierzchołka B tego trójkąta i długość odcinka AB.

Zadanie 6. [2017 czerwiec NF i SF, zad. 33. (4 pkt)]

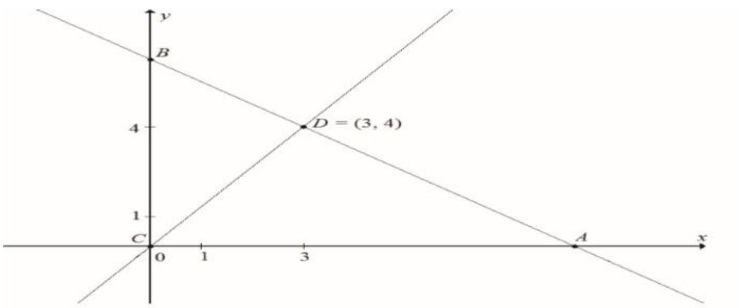
Punkty $A=(-2,-8)$ i $B=(14,-8)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AB|=|AC|$. Wysokość AD tego trójkąta jest zawarta w prostej o równaniu $y=\frac{1}{2}x-7$. Oblicz współrzędne wierzchołka C tego trójkąta.

Zadanie 7. [2017 maj NF i SF, zad. 32. (5 pkt)]

Dane są punkty $A=(-4,0)$ i $M=(2,9)$ oraz prosta k o równaniu $y=-2x+10$. Wierzchołek B trójkąta ABC to punkt przecięcia prostej k z osią Ox układu współrzędnych, a wierzchołek C jest punktem przecięcia prostej k z prostą AM. Oblicz pole trójkąta ABC.

Zadanie 8. [2017 sierpień NF i SF, zad. 33. (4 pkt)]

Punkt $C=(0,0)$ jest wierzchołkiem trójkąta prostokątnego ABC, którego wierzchołek A leży na osi Ox, a wierzchołek B na osi Oy układu współrzędnych. Prosta zawierająca wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka C przecina przeciwprostokątną AB w punkcie $D=(3,4)$.



Oblicz współrzędne wierzchołków A i B tego trójkąta oraz długość przeciwprostokątnej AB.

Zadanie 9. [2018 czerwiec NF i SF, zad. 34. (4 pkt)]

Punkty $A=(-1,1)$ i $C=(1,9)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC|=|BC|$. Podstawa AB tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$. Oblicz współrzędne wierzchołka B tego trójkąta.

Zadanie 10. [2018 maj NF i SF, zad. 32. (5 pkt)]

W układzie współrzędnych punkty $A=(4,3)$ i $B=(10,5)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y=2x+3$. Oblicz współrzędne punktu C, dla którego kąt ABC jest prosty.

Zadanie 11. [2018 sierpień NF i SF, zad. 31. (2 pkt)]

Punkty $A=(2,4)$, $B=(0,0)$, $C=(4,-2)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Punkt D jest środkiem boku AC tego trójkąta. Wyznacz równanie prostej BD.

Zadanie 12. [2019 maj NF, zad. 31. (4 pkt)]

Dany jest punkt $A=(-18,10)$. Prosta o równaniu $y=3x$ jest symetralną odcinka AB. Wyznacz współrzędne punktu B.

Zadanie 13. [2019 sierpień NF i SF, zad. 31. (2 pkt)]

Przekątne rombu $ABCD$ przecinają się w punkcie $S=\left(-\frac{21}{2},-1\right)$. Punkty A i C leżą na prostej o równaniu $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{2}$. Wyznacz równanie prostej BD.

Zadanie 14. [2020 maj NF, zad. 32. (4 pkt)]

Dany jest kwadrat $ABCD$, w którym $A=(5,-\frac{5}{3})$. Przekątna BD tego kwadratu jest zawarta w prostej o równaniu $y=\frac{4}{3}x$. Oblicz współrzędne punktu przecięcia przekątnych AC i BD oraz pole kwadratu $ABCD$.

Zadanie 15. [2020 sierpień NF i SF, zad. 34. (5 pkt)]

Prosta o równaniu $y=-2x+7$ jest symetralną odcinka PQ, gdzie $P=(4,5)$. Oblicz współrzędne punktu Q.

7. Dowody algebraiczne

Zadanie 1. [2015 czerwiec NF, zad. 29. (2 pkt)]

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $3x^2+5y^2-4xy\geq 0$.

Zadanie 2. [2015 maj NF, zad. 27. (2 pkt)]

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$.

Zadanie 3. [2015 sierpień NF i SF, zad. 30. (2 pkt)]

Wykaż, że dla wszystkich nieujemnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$.

Zadanie 4. [2016 czerwiec NF, zad. 28. (2 pkt)]

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność

$$x^4 + y^4 + x^2 + y^2 \geq 2\left(x^3 + y^3\right).$$

Zadanie 5. [2016 maj NF i SF, zad. 30. (2 pkt)]

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2n^2 + 2n$ dla $n \geq 1$. Wykaż, że suma każdych dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 6. [2016 sierpień, zad. 28. (2 pkt)]

Wykaż, że jeżeli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek $abc = 1$, to

$$a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = ab + ac + bc.$$

Zadanie 7. [2017 czerwiec NF i SF, zad. 29. (2 pkt)]

Wykaż, że prawdziwa jest nierówność

$$(1{,}5)^{100} < 6^{25}.$$

Zadanie 8. [2017 maj NF i SF, zad. 27. (2 pkt)]

Wykaż, że liczba $4^{2017} + 4^{2018} + 4^{2019} + 4^{2020}$ jest podzielna przez 17.

Zadanie 9. [2017 sierpień NF i SF, zad. 28. (2 pkt)]

Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność

$$4x+\frac{1}{x}\geq 4.$$

Zadanie 10. [2018 czerwiec NF i SF, zad. 28. (2 pkt)]

Wykaż, że reszta z dzielenia sumy kwadratów czterech kolejnych liczb naturalnych przez 8 jest równa 6.

Zadanie 11. [2018 maj NF i SF, zad. 28. (2 pkt)]

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\geq\frac{2}{a+b}.$$

Zadanie 12. [2018 sierpień NF i SF, zad. 29. (2 pkt)]

Wykaż, że jeżeli a i b są liczbami rzeczywistymi dodatnimi, to $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$.

Zadanie 13. [2019 maj NF, zad. 28. (2 pkt)]

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność

$$3a^2-2ab+3b^2\geq 0.$$

Zadanie 14. [2019 czerwiec NF, zad. 29. (2 pkt)]

Wykaż, że dla każdej liczby $a>0$ i dla każdej liczby $b>0$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}.$$

Zadanie 15. [2019 sierpień, zad. 28. (2 pkt)]

Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej x prawdziwa jest nierówność $x+\frac{1-x}{x}\geq 1$.

Zadanie 16 [2020 maj, zad. 28. (2 pkt)]

Wykaż, że dla każdych dwóch różnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność

$$a(a-2b)+2b^2>0.$$

Zadanie 17. [2020 sierpień, zad. 28. (2 pkt)]

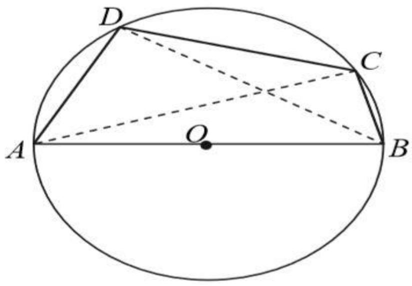
Wykaż, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność

$$a(a+b)+b^2>3ab.$$

8. Dowody Geometryczne

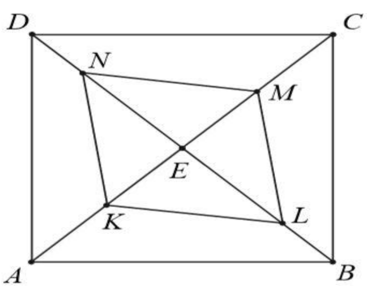
Zadanie 1. [2015 czerwiec NF, zad. 28. (2 pkt)]

Czworokąt $ABCD$ wpisano w okrąg tak, że bok AB jest średnicą tego okręgu (zobacz rysunek). Udowodnij, że $|AD|^2+|BD|^2=|BC|^2+|AC|^2$.



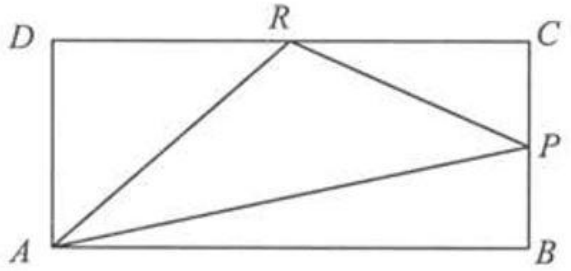
Zadanie 2. [2015 maj NF, zad. 28. (2 pkt)]

Dany jest kwadrat $ABCD$. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Punkty K i M są środkami odcinków – odpowiednio – AE i EC. Punkty L i N leżą na przekątnej BD tak, że $|BL|=\frac{1}{3}|BE|$ i $|DN|=\frac{1}{3}|DE|$ (zobacz rysunek). Wykaż, że stosunek pola czworokąta $KLMN$ do pola kwadratu $ABCD$ jest równy $1:3$.



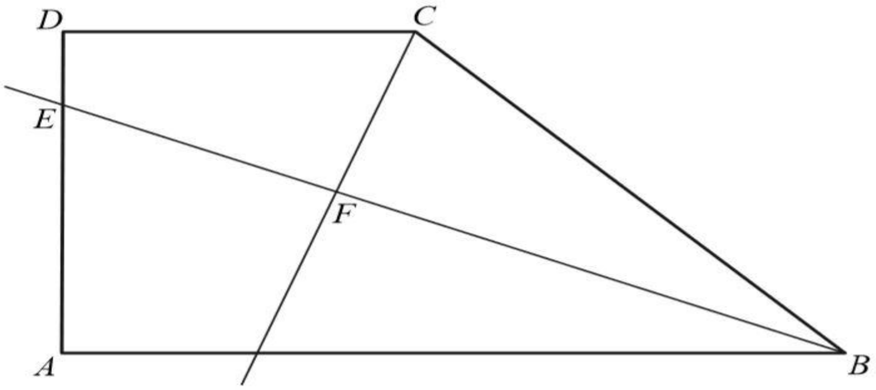
Zadanie 3. [2015 sierpień NF i SF, zad. 31. (2 pkt)]

W prostokącie $ABCD$ punkt P jest środkiem boku BC, a punkt R jest środkiem boku CD. Wykaż, że pole trójkąta APR jest równe sumie pól trójkątów ADR oraz PCR.



Zadanie 4. [2016 czerwiec NF, zad. 29. (2 pkt)]

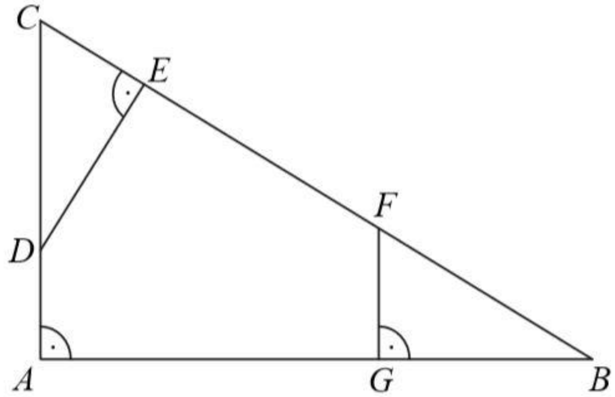
Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD oraz wysokości AD. Dwusieczna kąta ABC przecina ramię AD w punkcie E oraz dwusieczną kąta BCD w punkcie F (zobacz rysunek).



Wykaż, że w czworokącie $CDEF$ sumy miar przeciwległych kątów są sobie równe.

Zadanie 5. [2016 maj NF i SF, zad. 29. (2 pkt)]

Dany jest trójkąt prostokątny ABC. Na przyprostokątnych AC i AB tego trójkąta obrano odpowiednio punkty D i G. Na przeciwprostokątnej BC wyznaczono punkty E i F takie, że $|\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle BGF| = 90°$ (zobacz rysunek). Wykaż, że trójkąt CDE jest podobny do trójkąta FBG.

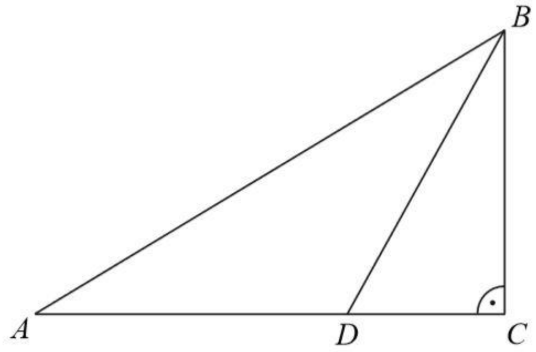


Zadanie 6. [2016 sierpień NF i SF, zad. 30. (2 pkt)]

W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD przekątne AC oraz BD przecinają się w punkcie S. Wykaż, że jeżeli $|AS| = \frac{5}{6}|AC|$, to pole trójkąta ABS jest 25 razy większe od pola trójkąta DCS.

Zadanie 7. [2017 czerwiec NF i SF, zad. 28. (2 pkt)]

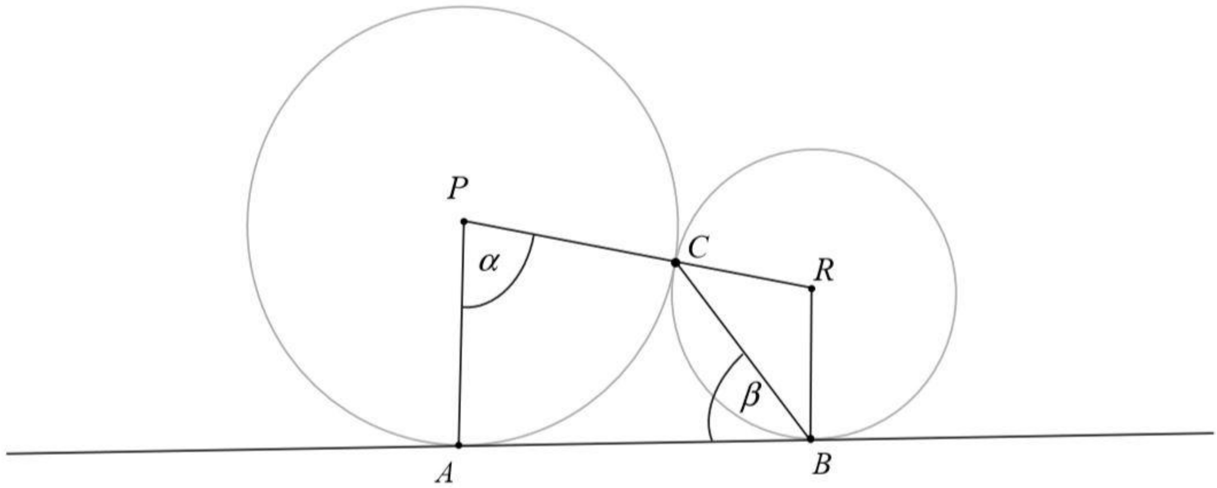
Dwusieczna kąta ostrego ABC przecina przyprostokątną AC trójkąta prostokątnego ABC w punkcie D.



Udowodnij, że jeżeli $|AD| = |BD|$, to $|CD| = \frac{1}{2} \cdot |BD|$.

Zadanie 8. [2017 maj NF i SF, zad. 28. (2 pkt)]

Dane są dwa okręgi o środkach w punktach P i R, styczne zewnętrznie w punkcie C. Prosta AB jest styczna do obu okręgów odpowiednio w punktach A i B oraz $|\sphericalangle APC| = \alpha$ i $|\sphericalangle ABC| = \beta$ (zobacz rysunek). Wykaż, że $\alpha = 180° - 2\beta$.

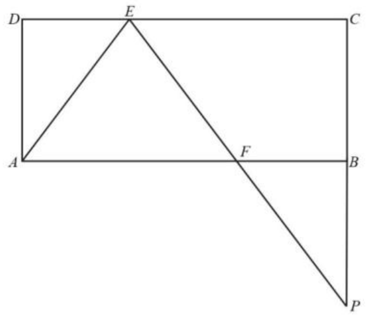


Zadanie 9. [2017 sierpień NF, zad. 29. (2 pkt)]

Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle ACB| = 90°$ i $|\sphericalangle ABC| = 60°$. Niech D oznacza punkt wspólny wysokości poprowadzonej z wierzchołka C kąta prostego i przeciwprostokątnej AB tego trójkąta. Wykaż, że $|AD| : |DB| = 3 : 1$.

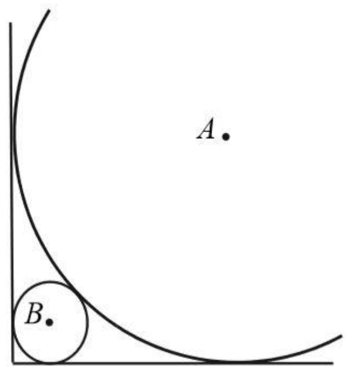
Zadanie 10. [2018 czerwiec NF i SF, zad. 29. (2 pkt)]

Dany jest prostokąt $ABCD$. Na boku CD tego prostokąta wybrano taki punkt E, że $|EC| = 2|DE|$, a na boku AB wybrano taki punkt F, że $|BF| = |DE|$. Niech P oznacza punkt przecięcia prostej EF z prostą BC (zobacz rysunek). Wykaż, że trójkąty AED i FPB są przystające.



Zadanie 11. [2018 maj NF i SF, zad. 29. (2 pkt)]

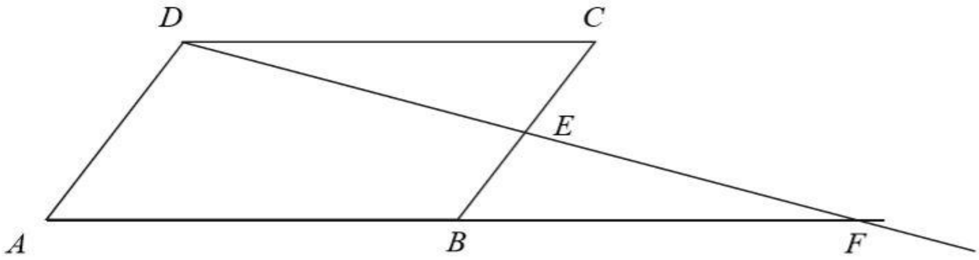
Okręgi o środkach odpowiednio A i B są styczne zewnętrznie i każdy z nich jest styczny do obu ramion danego kąta prostego (zobacz rysunek). Promień okręgu o środku A jest równy 2.



Uzasadnij, że promień okręgu o środku B jest mniejszy od $\sqrt{2} - 1$.

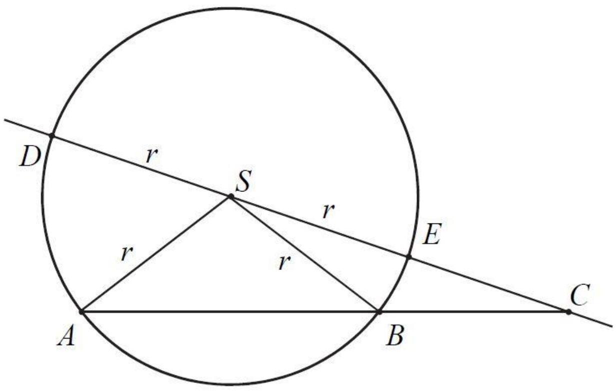
Zadanie 12. [2018 sierpień NF i SF, zad. 28. (2 pkt)]

W równoległoboku $ABCD$ punkt E jest środkiem boku BC. Z wierzchołka D poprowadzono prostą przecinającą bok BC w punkcie E. Proste AB i DE przecinają się w punkcie F (zobacz rysunek). Wykaż, że punkt B jest środkiem odcinka AF.



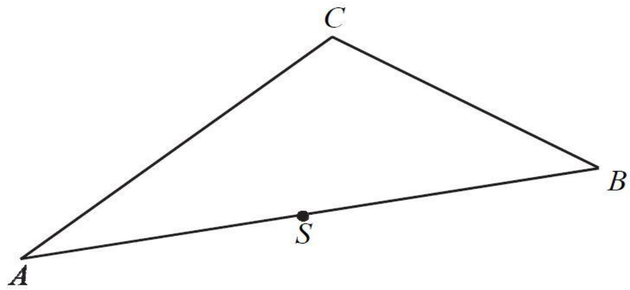
Zadanie 13. [2019 maj NF, zad. 29. (2 pkt)]

Dany jest okrąg o środku w punkcie S i promieniu r. Na przedłużeniu cięciwy AB poza punkt B odłożono odcinek BC równy promieniowi danego okręgu. Przez punkty C i S poprowadzono prostą. Prosta CS przecina dany okrąg w punktach D i E (zobacz rysunek). Wykaż, że jeżeli miara kąta ACS jest równa α, to miara kąta ASD jest równa 3α.



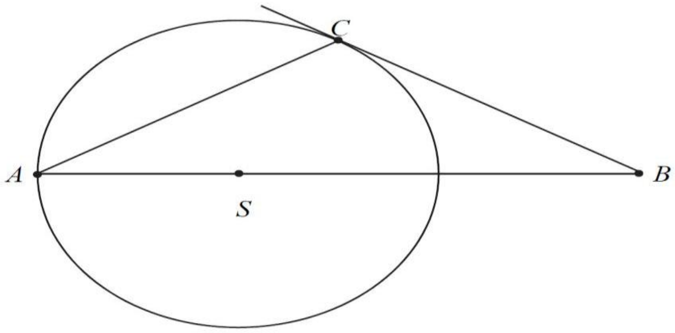
Zadanie 14. [2019 czerwiec NF, zad. 29. (2 pkt)]

Dany jest trójkąt ABC. Punkt S jest środkiem boku AB tego trójkąta (zobacz rysunek). Wykaż, że odległości punktów A i B od prostej CS są równe.



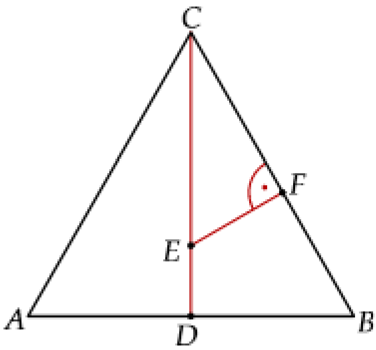
Zadanie 15. [2019 sierpień, zad. 29. (2 pkt)]

Wierzchołki A i C trójkąta ABC leżą na okręgu o promieniu r, a środek S tego okręgu leży na boku AB trójkąta (zobacz rysunek). Prosta BC jest styczna do tego okręgu w punkcie C, a ponadto $|AC| = r\sqrt{3}$. Wykaż, że kąt ACB ma miarę $120°$.



Zadanie 16. [2020 maj, zad. 29. (2 pkt)]

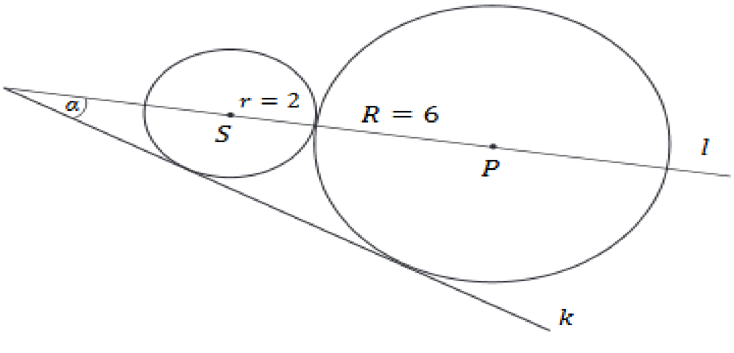
Trójkąt ABC jest równoboczny. Punkt E leży na wysokości CD tego trójkąta oraz $|CE| = \frac{3}{4}|CD|$. Punkt F leży na boku BC i odcinek EF jest prostopadły do BC (zobacz rysunek).



Wykaż, że $|CF| = \frac{9}{16}|CB|$.

Zadanie 17. [2020 sierpień, zad. 29. (2 pkt)]

Dwa okręgi o promieniach $r = 2$ i $R = 6$ są styczne zewnętrznie i są styczne do wspólnej prostej k. Wykaż, że prosta l przechodząca przez środki S i P tych okręgów przecina prostą k pod kątem $\alpha = 30°$ (zobacz rysunek).



9. Rachunek prawdopodobieństwa

Zadanie 1. [2015 czerwiec NF, zad. 31. (2 pkt)]

Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych losowo wybieramy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że otrzymamy liczbę podzielną przez 8 lub liczbę podzielną przez 12.

Zadanie 2. [2015 maj NF, zad. 33. (4 pkt)]

Wśród 115 osób przeprowadzono badania ankietowe, związane z zakupami w pewnym kiosku. W poniższej tabeli przedstawiono informacje o tym, ile osób kupiło bilety tramwajowe ulgowe oraz ile osób kupiło bilety tramwajowe normalne.

Rodzaj kupionych biletów	Liczba osób
ulgowe	76
normalne	41

Uwaga! 27 osób spośród ankietowanych kupiło oba rodzaje biletów.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że osoba losowo wybrana spośród ankietowanych nie kupiła żadnego biletu. Wynik przedstaw w formie nieskracalnego ułamka.

Zadanie 3. [2015 sierpień NF, zad. 27. (2 pkt)]

Mamy dwa pudełka: w pierwszym znajduje się 6 kul ponumerowanych kolejnymi liczbami od 1 do 6, a w drugim – 8 kul ponumerowanych kolejnymi liczbami od 1 do 8. Losujemy po jednej kuli z każdego pudełka i tworzymy liczbę dwucyfrową w ten sposób, że numer kuli wylosowanej z pierwszego pudełka jest cyfrą dziesiątek, a numer kuli wylosowanej z drugiego – cyfrą jedności tej liczby. Oblicz prawdopodobieństwo, że utworzona liczba jest podzielna przez 11.

Zadanie 4. [2015 sierpień SF, zad. 28. (2 pkt)]

Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych losowo wybieramy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że otrzymamy liczbę podzielną przez 9 lub podzielną przez 12.

Zadanie 5. [2016 maj NF i SF, zad. 34. (2 pkt)]

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie równa 30. Wynik zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Zadanie 6. [2016 sierpień NF, zad. 34. (2 pkt)]

Ze zbioru siedmiu liczb naturalnych $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy dwie różne liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że większą z wylosowanych liczb będzie liczba 5.

Zadanie 7. [2017 czerwiec NF i SF, zad. 31. (2 pkt)]

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ losujemy bez zwracania dwa razy po jednej liczbie. Wylosowane liczby tworzą parę (a, b), gdzie a jest wynikiem pierwszego losowania, b jest wynikiem drugiego losowania. Oblicz, ile jest wszystkich par (a, b) takich, że iloczyn $a \cdot b$ jest liczbą parzystą.

Zadanie 8. [2017 maj NF i SF, zad. 33. (2 pkt)]

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosujemy liczbę, która jest równocześnie mniejsza od 40 i podzielna przez 3. Wynik zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Zadanie 9. [2017 sierpień NF, zad. 30. (2 pkt)]

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 4, 5, 10\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że iloraz pierwszej wylosowanej liczby przez drugą wylosowaną liczbę jest liczbą całkowitą.

Zadanie 10. [2018 czerwiec NF i SF, zad. 31. (2 pkt)]

Rzucamy cztery razy symetryczną monetą. Po przeprowadzonym doświadczeniu zapisujemy liczbę uzyskanych orłów (od 0 do 4) i liczbę uzyskanych reszek (również od 0 do 4). Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w tych czterech rzutach liczba uzyskanych orłów będzie większa niż liczba uzyskanych reszek.

Zadanie 11. [2018 maj NF i SF, zad. 33. (4 pkt)]

Dane są dwa zbiory: $A=\{100, 200, 300, 400, 500, 600, 700\}$ i $B=\{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$. Z każdego z nich losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie podzielna przez 3. Obliczone prawdopodobieństwo zapisz w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego.

Zadanie 12. [2018 sierpień NF i SF, zad. 33. (4 pkt)]

Ze zbioru $A=\{-3,-2,-1,1,2,3\}$ losujemy liczbę a, natomiast ze zbioru $B=\{-1,0,1,2\}$ losujemy liczbę b. Te liczby są – odpowiednio – współczynnikiem kierunkowym i wyrazem wolnym funkcji liniowej $f(x)=ax+b$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymana funkcja f jest rosnąca i ma dodatnie miejsce zerowe.

Zadanie 13. [2019 maj NF, zad. 33. (2 pkt)]

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest liczbą nieparzystą.

Zadanie 14. [2019 czerwiec NF i SF, zad. 31. (2 pkt)]

Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy sumę oczek równą 16.

Zadanie 15. [2019 sierpień, zad. 30. (2 pkt)]

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że wylosowana liczba ma w zapisie dziesiętnym cyfrę dziesiątek, która należy do zbioru $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, i jednocześnie cyfrę jedności, która należy do zbioru $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Zadanie 16. [2020 maj, zad. 30. (2 pkt)]

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ściance ma inną liczbę oczek – od jednego oczka do sześciu oczek. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że co najmniej jeden raz wypadnie ścianka z pięcioma oczkami.

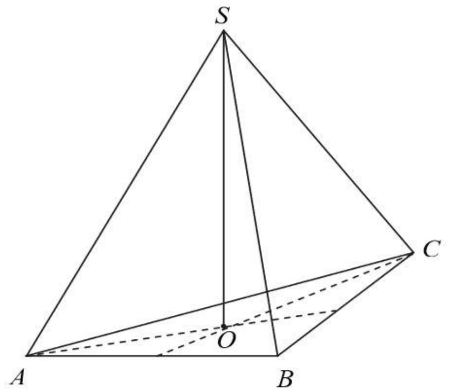
Zadanie 17. [2020 sierpień, zad. 31. (2 pkt)]

W pudełku jest 8 kul, z czego 5 białych i 3 czarne. Do tego pudełka dołożono n kul białych. Doświadczenie polega na losowaniu jednej kuli z tego pudełka. Prawdopodobieństwo, że będzie to kula biała, jest równe $\frac{11}{12}$. Oblicz n.

10. Stereometria

Zadanie 1. [2015 czerwiec NF, zad. 34. (5 pkt)]

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$ jest równa $27\sqrt{3}$. Długość krawędzi AB podstawy ostrosłupa jest równa 6 (zobacz rysunek). Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

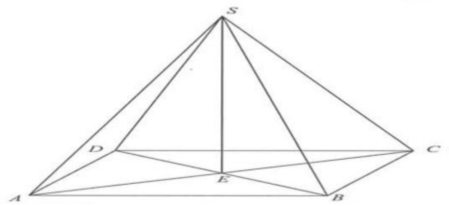


Zadanie 2. [2015 maj NF, zad. 32. (4 pkt)]

Wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 16. Przekątna graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny jego podstawy pod kątem, którego cosinus jest równy $\frac{3}{5}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Zadanie 3. [2015 sierpień NF, zad. 33. (4 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest prostokąt, którego boki pozostają w stosunku 3 : 4, a pole jest równe 192 (zobacz rysunek). Punkt E jest wyznaczony przez przecinające się przekątne podstawy, a odcinek SE jest wysokością ostrosłupa. Każda krawędź boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $30°$. Oblicz objętość ostrosłupa.



Zadanie 4. [2015 sierpień SF, zad. 34. (5 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym ściana boczna o polu równym 10 jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $60°$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 5. [2016 czerwiec NF, zad. 32. (4 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

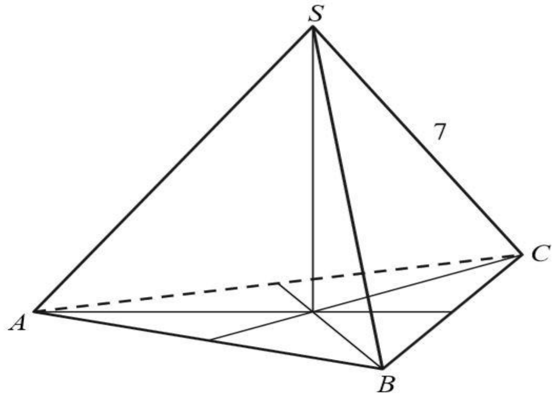
Dany jest stożek o objętości 8π, w którym stosunek wysokości do promienia podstawy jest równy $3:8$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego stożka.

Zadanie 6. [2016 maj NF, zad. 33. (5 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Podstawą ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$ jest trójkąt równoboczny ABC. Wysokość SO tego ostrosłupa jest równa wysokości jego podstawy. Objętość tego ostrosłupa jest równa 27. Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa $ABCS$ oraz cosinus kąta, jaki tworzą wysokość ściany bocznej i płaszczyzna podstawy ostrosłupa.

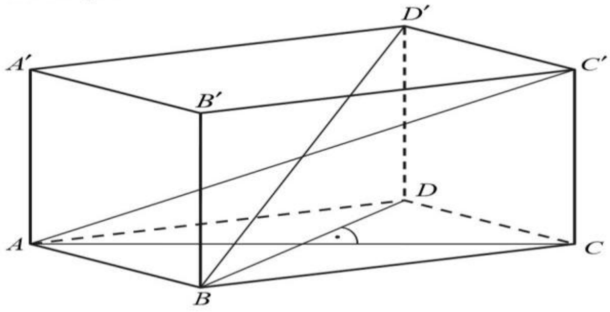
Zadanie 7. [2016 sierpień NF, zad. 33. (5 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Trójkąt równoboczny ABC jest podstawą ostrosłupa prawidłowego $ABCS$, w którym ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $60°$, a krawędź boczna ma długość 7 (zobacz rysunek). Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Zadanie 8. [2017 czerwiec NF i SF, zad. 34. (5 pkt)]

Podstawą graniastosłupa prostego $ABCDA'B'C'D'$ jest romb $ABCD$. Przekątna AC' tego graniastosłupa ma długość 8 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $30°$, a przekątna BD' jest nachylona do tej płaszczyzny pod kątem $45°$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

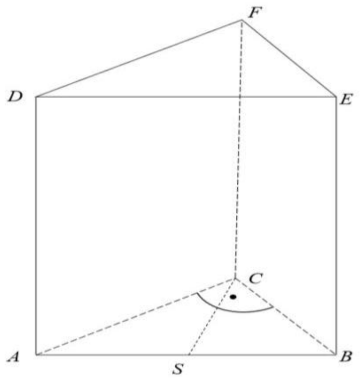


Zadanie 9. [2017 maj NF i SF, zad. 34. (4 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym wysokość ściany bocznej prostopadła do krawędzi podstawy ostrosłupa jest równa $\frac{5\sqrt{3}}{4}$, a pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe $\frac{15\sqrt{3}}{4}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 10. [2017 sierpień NF i SF, zad. 34. (5 pkt)]

Podstawą graniastosłupa prostego $ABCDEF$ jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle ACB| = 90°$ (zobacz rysunek). Stosunek długości przyprostokątnej AC tego trójkąta do długości przyprostokątnej BC jest równy 4 : 3. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, a długość odcinka SC jest równa 5. Pole ściany bocznej $BEFC$ graniastosłupa jest równe 48. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

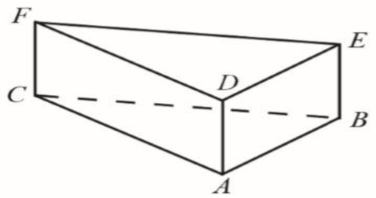


Zadanie 11. [2018 czerwiec NF i SF, zad. 32. (5 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o wysokości $H = 16$. Cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa jest równy $\frac{3}{5}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

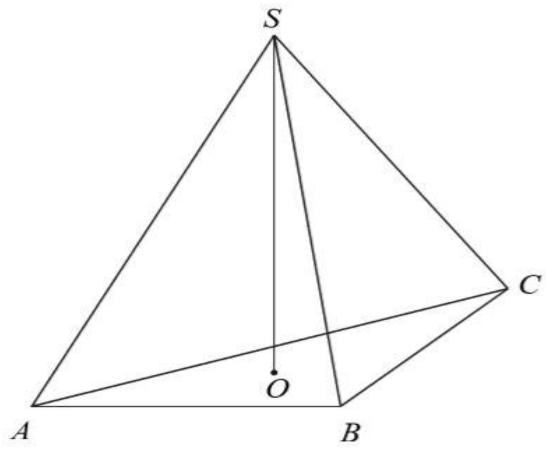
Zadanie 12. [2018 maj NF i SF, zad. 34. (4 pkt)]

Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny (zobacz rysunek). Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe $45\sqrt{3}$. Pole podstawy graniastosłupa jest równe polu jednej ściany bocznej. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



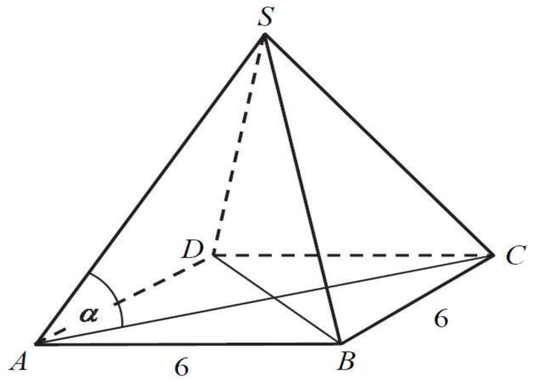
Zadanie 13. [2018 sierpień NF i SF, zad. 32. (5 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCS$ krawędź podstawy ma długość a. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest dwa razy większe od pola jego podstawy. Oblicz cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy.



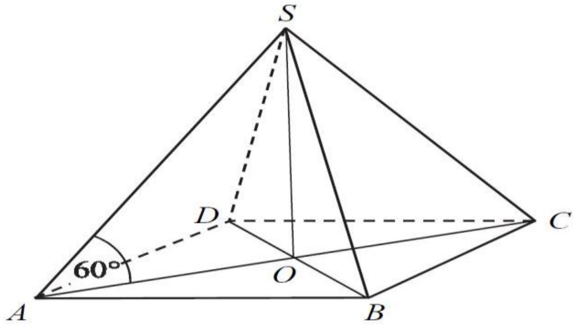
Zadanie 14. [2019 maj NF i SF, zad. 34. (5 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Długość krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 6. Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest cztery razy większe od pola jego podstawy. Kąt α jest kątem nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy (zobacz rysunek). Oblicz cosinus kąta α.



Zadanie 15. [2019 czerwiec NF i SF, zad. 32. (5 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

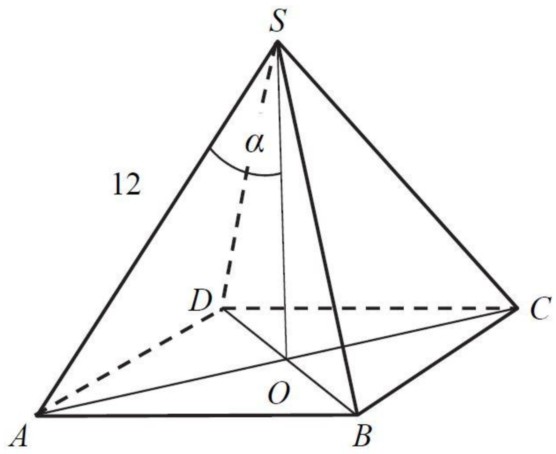
Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest prostokąt o polu równym 432, a stosunek długości boków tego prostokąta jest równy $3 : 4$. Przekątne podstawy $ABCD$ przecinają się w punkcie O. Odcinek SO jest wysokością ostrosłupa (zobacz rysunek). Kąt SAO ma miarę $60°$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Zadanie 16. [2019 sierpień NF i SF, zad. 34. (5 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

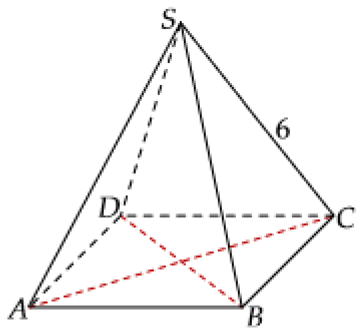
Długość krawędzi bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCDS$ jest równa 12. (zobacz rysunek). Krawędź boczna tworzy z wysokością tego ostrosłupa kąt α taki, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Zadanie 17. [2020 maj NF i SF, zad. 34. (5 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$, którego krawędź boczna ma długość 6 (zobacz rysunek). Ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem, którego tangens jest równy $\sqrt{7}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Zadanie 18. [2020 sierpień NF i SF, zad. 33. (4 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Pole powierzchni bocznej stożka jest trzy razy większe od pola jego podstawy. Wysokość tego stożka jest równa 12. Oblicz objętość tego stożka.

11. Zadania tekstowe

Zadanie 1. [2015 maj NF, zad. 31. (2 pkt)]

Jeżeli do licznika i do mianownika nieskracalnego dodatniego ułamka dodamy połowę jego licznika, to otrzymamy $\frac{4}{7}$, a jeżeli do licznika i do mianownika dodamy 1, to otrzymamy $\frac{1}{2}$. Wyznacz ten ułamek.

Zadanie 2. [2016 czerwiec NF, zad. 33. (4 pkt)]

Rejsowy samolot z Warszawy do Rzymu przelatuje nad Austrią każdorazowo tą samą trasą z taką samą zakładaną prędkością przelotową. We wtorek jego średnia prędkość była o 10% większa niż prędkość przelotowa, a w czwartek średnia prędkość była o 10% mniejsza od zakładanej prędkości przelotowej. Czas przelotu nad Austrią w czwartek różnił się od wtorkowego o 12 minut. Jak długo trwał przelot tego samolotu nad Austrią we wtorek?

Zadanie 3. [2016 maj NF i SF, zad. 26. (2 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

W tabeli przedstawiono roczne przyrosty wysokości pewnej sosny w ciągu sześciu kolejnych lat.

kolejne lata	1	2	3	4	5	6
przyrost (w cm)	10	10	7	8	8	7

Oblicz średni roczny przyrost wysokości tej sosny w badanym okresie sześciu lat. Otrzymany wynik zaokrąglij do 1 cm. Oblicz błąd względny otrzymanego przybliżenia. Podaj ten błąd w procentach.

Zadanie 4. [2016 maj NF, zad. 31 (2 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Skala Richtera służy do określania siły trzęsień ziemi. Siła ta opisana jest wzorem $R=\log\frac{A}{A_0}$, gdzie A oznacza amplitudę trzęsienia wyrażoną w centymetrach, $A_0=10^{-4}$ cm jest stałą, nazywaną amplitudą wzorcową. 5 maja 2014 roku w Tajlandii miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 6,2 w skali Richtera. Oblicz amplitudę trzęsienia ziemi w Tajlandii i rozstrzygnij, czy jest ona większa, czy – mniejsza od 100 cm.

Zadanie 5. [2016 sierpień NF i SF, zad. 27. (2 pkt)]

Jeżeli do licznika pewnego nieskracalnego ułamka dodamy 32, a mianownik pozostawimy niezmieniony, to otrzymamy liczbę 2. Jeżeli natomiast od licznika i od mianownika tego ułamka odejmiemy 6, to otrzymamy liczbę $\frac{8}{17}$. Wyznacz ten ułamek.

Odpowiedzi

1.Nierówności Kwadratowe

1.X € <$\frac{1}{3}$; 3>   **2**. X= 0   **3**. X€ (-∞;2) U (3, ∞)   **4.**X = $\frac{4}{3}$ X = 4

5. X€ <2;3>   **6**.X € <-3; 3>   **7.** X = -$\frac{1}{2}$ X = 1   **8**. X € (0;2)

9.X = -5 X = 3 X = 4   **10.** X€ (-∞; -3) U ($\frac{1}{2}$; ∞)   **11.** X € (-∞; -4> U <2; ∞)   **12**.X € (-$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$)

13. X € <0; 9>   **14**.X € <-2; $\frac{3}{2}$>   **15**.X = $\sqrt{6}$ X=-$\sqrt{6}$ X= -$\frac{2}{3}$ **16**.X € (-∞; -$\frac{1}{2}$) U (1; ∞)

17.X € (-∞; -1) U ($\frac{5}{2}$, ∞)   **18.**X = -5 X= 8 X= -8   **19**.X € (-8;2)   **20**.X = -4 X= -3 X=4

21.X= 2 X= -1 X=5   **22**.X € (-∞;$\frac{4}{3}$)U(4; , ∞)   **23**.X=3 X=-3 X=5   **24.**X€ (-∞;-$\frac{2}{7}$) U (1; ∞)

25. X=-2   **26.** X=4 X=-4 X=1   **27.** X € <1;$\frac{3}{2}$>   **28.** $x\in\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)\cup(1,+\infty)$.

29. X= -1 X= 0 X=1 x=2   **30**. X€ (-∞;−$\frac{1}{2}$> U <3; ∞)   **31**. X=-3 X=-2 X=3

2. Funkcja kwadratowa

1. f(x)= -$\frac{1}{4}(x+3)^2$+4   **2**. $f_{min}(3)=-6$ $f_{max}=(0)=3$ **3**.a= -$\frac{1}{4}$ b=3   c=0   **4**. $f_{min}= -30\frac{1}{4}$ $f_{max}= 102$

5. a= -$\frac{1}{2}$ **6**. $f_{min}= -\frac{16}{3}$ **7.** b= -14 c= -5   **8**. zw= (-2; ∞)

3. Trygonometria

1. $\frac{2}{7}$ **2**. $\frac{1}{4}$ **3**. $\frac{1}{4}$ **4**. 2   **5**. $\frac{1}{2}$

4. Ciągi

1. a_n= 4n-2   **2.** h=11   **3.** q=2   **4**. a_1= 567 r= -42 a_{14}= 21

5. 42   **6**. 676 368   **7**. 2   **8**. 9

9. 50   **10**. -$\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$ **11**. -3   **12.** = -2, 4$\frac{1}{2}$

13. a_1 = 26 k= 27   **14**. a_5 = 1250   **15**. a_{40} = 10   **16**. q=3   **17**. x= $-\frac{5}{6}$ x=1

5.Planimetria

1. 12,42 **2.** 26^o, $76^o 78^o$ **3.** 25 **4.** 60

5. 30 **6.** |BD| = $\sqrt{68} = 2\sqrt{17}$ **7.** |AC| = 20 **8.** $r_2 = 26$

9. $\frac{24\sqrt{97}}{485}$

6. Geometria analityczna

1. C(0,- $\frac{5}{3}$) **2.** -7 **3.** y= -3x + 16 **4.** $\frac{8}{3}$

5. B(7, $4\frac{1}{2}$) lABl= 12,5 **6.** C($\frac{38}{5}$, $\frac{24}{5}$) **7.** $34\frac{5}{7}$ **8.** A($\frac{25}{3}$,0) B(0, $\frac{25}{4}$)

9. B(8,6; 5,8) **10.** C($\frac{32}{5}$, $\frac{79}{5}$) **11.** y=$\frac{1}{3}$x **12.** B = ($\frac{102}{5}$,-$\frac{14}{5}$)

13. y= -3x- $\frac{65}{2}$ **14.** S=(1, $\frac{4}{3}$) P=50 **15.** Q=(- $\frac{4}{5}$, $\frac{13}{5}$)

9. Rachunek prawdopodobieństwa

1. $\frac{1}{6}$ **2.** $\frac{5}{23}$ **3.** $\frac{1}{8}$ **4.** $\frac{8}{45}$

5. $\frac{1}{801}$ **6.** $\frac{4}{21}$ **7.** 154 **8.** $\frac{1}{9}$

9. $\frac{12}{25}$ **10.** $\frac{5}{16}$ **11.** $\frac{16}{49}$ **12.** $\frac{1}{8}$

13. P(A)= $\frac{9}{25}$ **14.** P(A)= $\frac{1}{36}$ **15.** P(A)= $\frac{5}{18}$ **16.** P(A)= $\frac{11}{36}$

17. n=28

10. Stereometria

1. $9(\sqrt{3}+2\sqrt{21})$ **2.** $48(3+8\sqrt{2})$ **3.** $\frac{640\sqrt{3}}{3}$ **4.** $\frac{20\sqrt{15}}{3}$

5. $2\sqrt{73}\pi$ **6.** $9\sqrt{30}$,cosα= $\frac{\sqrt{10}}{10}$ **7.** $21\sqrt{7}$ **8.** $16\sqrt{3} + 64$

9. $\frac{\sqrt{209}}{12}$ **10.** 192 **11.** $96\sqrt{41}$ **12.** $\frac{81}{2}$

13. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ **14.** cosα= $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **15.** V= $2160\sqrt{3}$ **16.** V= $\frac{512\sqrt{5}}{3}$ **17.** V= $\frac{32\sqrt{7}}{3}$

11. Zadania tekstowe

1. $\frac{8}{17}$ **2**. t= 54 min **3**. s= 8cm, bw= 4% **4**. A= $10^{2,2}$, A>100cm **5**. $\frac{14}{23}$