2020/2021

Zadania matura rozszerzona (otwarte)

1.Funkcja Kwadratowa z Parametrem

Zadanie 1. [2015 maj SF, zad. 3. (6 pkt)]
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $\left(m^2-m\right)x^2-x+1=0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $\frac{1}{x_1+x_2} \le \frac{m}{3} \le \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

Zadanie 2. [2016 czerwiec NF, zad. 12. (4 pkt)]
Liczba m jest sumą odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania

$$k^2x^2+(k-1)x+1=0\text{, gdzie } k \neq 0.$$

Wyznacz zbiór wartości funkcji określonej wzorem $f(x)=2^m$.

Zadanie 3. [2016 maj NF, zad. 12. (6 pkt)]
Dany jest trójmian kwadratowy $f(x)=x^2+2(m+1)x+6m+1$. Wyznacz wszystkie rzeczywiste wartości parametru m, dla których ten trójmian ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 tego samego znaku, spełniające warunek $|x_1-x_2|<3$.

Zadanie 4. [2016 czerwiec SF, zad. 3. (5 pkt)]
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2+3x+\frac{2-m}{m-3}=0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $x_1^3+x_2^3>-9$.

Zadanie 5. [2017 czerwiec SF, zad. 9. (6 pkt) NF zad. 13]
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2-3mx+2m^2+1=0$ ma dwa różne rozwiązania takie, że każde należy do przedziału $(-\infty, 3)$.

Zadanie 6. [2017 maj NF, zad. 12. (5 pkt); SF zad. 3]
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$4x^2-6mx+(2m+3)(m-3)=0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2, przy czym $x_1<x_2$, spełniające warunek

$$(4x_1-4x_2-1)(4x_1-4x_2+1)<0.$$

Zadanie 7. [2018 czerwiec NF, zad. 14. (6 pkt); SF zad. 9]
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$x^2-3mx+(m+1)(2m-1)=0$$

ma dwa różne rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunki: $x_1 \cdot x_2 \neq 0$ oraz $0<\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\le\frac{2}{3}$.

Zadanie 8. [2018 maj NF, zad. 12. (6 pkt); SF zad. 9]
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2+(m+1)x-m^2+1=0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2 ($x_1 \neq x_2$), spełniające warunek $x_1^3+x_2^3>-7x_1x_2$.

Zadanie 9. [2019 maj SF, zad. 1. (5 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których funkcja kwadratowa f określona wzorem

$$f(x) = (2m+1)x^2 + (m+2)x + m - 3$$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $(x_1 - x_2)^2 + 5x_1x_2 \geq 1$.

Zadanie 10. [2019 czerwiec NF, zad. 12. (6 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$4x^2 + (2-4m)x + m^2 - m - 2 = 0$$

ma dwa różne dodatnie rozwiązania x_1, x_2 spełniające nierówność $x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{17}{4}$.

Zadanie 11. [2020 maj NF, zad. 11. (4 pkt)]

Dane jest równanie kwadratowe $x^2 - (3m+2)x + 2m^2 + 7m - 15 = 0$ z niewiadomą x. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których różne rozwiązania x_1 i x_2 tego równania istnieją i spełniają warunek

$$2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2.$$

2.Wielomiany

Zadanie 1. [2014 czerwiec, zad. 9. (5 pkt)]

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 6x^3 + (m+4)x^2 - 2x - 1$ przez dwumian $x - m$ jest równa 8. Oblicz wartość m oraz pierwiastki tego wielomianu.

Zadanie 2. [2014 Informator CKE, zad. 5. (2 pkt)]

Wielomian $W(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6px + 9$ jest podzielny przez dwumian $x - 1$. Oblicz p. Zakoduj pierwsze trzy cyfry po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 3. [2014 maj, zad. 10. (5 pkt)]

Wyznacz wszystkie całkowite wartości parametru m, dla których równanie $(x^3 + 2x^2 + 2x + 1)\left[x^2 - (2m+1)x + m^2 + m\right] = 0$ ma trzy, parami różne, pierwiastki rzeczywiste, takie że jeden z nich jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych.

Zadanie 4. [2015 maj NF, zad. 15. (6 pkt)]

Suma wszystkich czterech współczynników wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ jest równa 0. Trzy pierwiastki tego wielomianu tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy równej 3. Oblicz współczynniki a, b i c. Rozważ wszystkie możliwe przypadki.

Zadanie 5. [2015 maj SF, zad. 2. (5 pkt)]

Dany jest wielomian $W(x)=x^3-3mx^2+(3m^2-1)x-9m^2+20m+4$. Wykres tego wielomianu, po przesunięciu o wektor $\vec{u}=[-3,0]$, przechodzi przez początek układu współrzędnych. Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu W.

Zadanie 6. [2016 maj SF, zad. 2. (5 pkt)]

Wielomian $W(x)=2x^3+mx^2-22x+n$ jest podzielny przez każdy z dwumianów $x+3$ i $x-4$. Oblicz wartości współczynników n i m oraz rozwiąż nierówność $W(x)\geq 0$.

Zadanie 7. [2017 maj NF, zad. 5. (2 pkt)]

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)=x^3-2x^2+ax+\frac{3}{4}$ przez dwumian $x-2$ jest równa 1. Oblicz wartość współczynnika a.

W poniższe kratki wpisz kolejno trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 8. [2017 maj SF, zad. 2. (5 pkt)]

Dany jest wielomian $W(x)=2x^3+ax^2-13x+b$. Liczba 3 jest jednym z pierwiastków tego wielomianu. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $(x+2)$ jest równa 20. Oblicz współczynniki a i b oraz pozostałe pierwiastki wielomianu $W(x)$.

Zadanie 9. [2018 czerwiec NF, zad. 8. (3 pkt)]

Wykaż, że równanie $x^8+x^2=2(x^4+x-1)$ ma tylko jedno rozwiązanie rzeczywiste $x=1$.

Zadanie 10. [2018 czerwiec SF, zad. 10. (6 pkt)]

Wielomian $W(x)=x^3+cx^2-10x+d$ jest podzielny przez dwumian $P(x)=x+2$. Przy dzieleniu wielomianu $W(x)$ przez dwumian $Q(x)=x-1$ otrzymujemy resztę (-30). Oblicz pierwiastki wielomianu $W(x)$ i rozwiąż nierówność $W(x)\geq 0$.

Zadanie 11. [2018 maj SF, zad. 8. (5 pkt)]

Liczba $\frac{2}{5}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)=5x^3-7x^2-3x+p$. Wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu i rozwiąż nierówność $W(x)>0$.

Zadanie 12. [2019 maj SF, zad. 6. (5 pkt)]

Wielomian określony wzorem $W(x)=2x^3+(m^3+2)x^2-11x-2(2m+1)$ jest podzielny przez dwumian $(x-2)$ oraz przy dzieleniu przez dwumian $(x+1)$ daje resztę 6. Oblicz m oraz pierwiastki wielomianu W dla wyznaczonej wartości m.

3. Wykresy funkcji

Zadanie 1. [2014 maj, zad. 1. (4 pkt)]

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=\dfrac{|x+3|+|x-3|}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

Zadanie 2. [2015 maj NF, zad. 7. (2 pkt)]

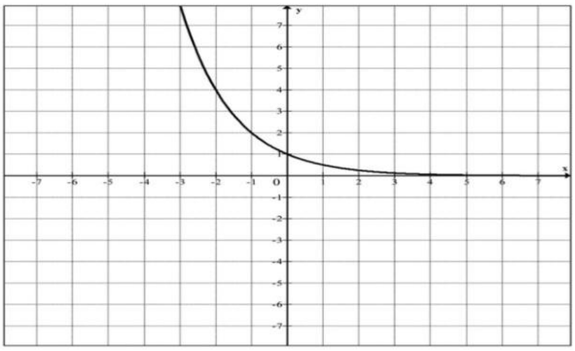
Liczby (-1) i 3 są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f. Oblicz $\dfrac{f(6)}{f(12)}$.

Zadanie 3. [2016 maj NF, zad. 10. (4 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których wykresy funkcji f i g, określonych wzorami $f(x)=x-2$ oraz $g(x)=5-ax$, przecinają się w punkcie o obu współrzędnych dodatnich.

Zadanie 4. [2016 czerwiec SF, zad. 11. (4 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji wykładniczej określonej wzorem $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$. Rozważamy funkcję g określoną wzorem $g(x)=\left|f(x+3)-2\right|$. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których równanie $g(x)=k$ ma dwa rozwiązania takie, że ich iloczyn jest liczbą ujemną.



Zadanie 5. [2018 maj NF, zad. 5. (2 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Punkt $A=(-5,3)$ jest środkiem symetrii wykresu funkcji homograficznej określonej wzorem $f(x)=\dfrac{ax+7}{x+d}$, gdy $x \neq -d$. Oblicz iloraz $\dfrac{d}{a}$.

W poniższe kratki wpisz kolejno cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 6. [2019 maj SF, zad. 1. (5 pkt)]

Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\frac{|x+2|}{x+2}-x+3|x-1|$, dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq -2$. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

Zadanie 7. [2019 czerwiec SF, zad. 1. (5 pkt)]

Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\frac{|x+2|}{x-1}-\frac{x+2}{|x-1|}+3$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$. Wyznacz zbiór jej wartości.

4. Dowody Algebraiczne

Zadanie 1. [2014 czerwiec, zad. 3. (3 pkt)]

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność

$$x(x-1)+y(y-1) \geqslant xy-1$$

Zadanie 2. [2014 grudzień, zad. 13. (3 pkt)]

Wykaż, że jeżeli $a>b\geq 1$, to $\frac{a}{2+a^3}<\frac{b}{2+b^3}$.

Zadanie 3. [2014 grudzień, zad. 14. (4 pkt)]

Wykaż, że jeżeli α,β,γ są kątami wewnętrznymi trójkąta i $\sin^2\alpha+\sin^2\beta<\sin^2\gamma$, to $\cos\gamma<0$.

Zadanie 4. [2014 Informator CKE, zad. 2. (3 pkt)]

Niech $m=\log_{21}7$. Wykaż, że $\log_7 27=\frac{3(1-m)}{m}$.

Zadanie 5. [2014 Informator CKE, zad. 6. (3 pkt)]

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k(k+1)(k+9)(k^2+1)$ jest podzielna przez 5.

Zadanie 6. [2014 Informator CKE, zad. 7. (2 pkt)]

Udowodnij, że jeśli $a>0$ i $b>0$ oraz $a+b=1$, to $ab\leq\frac{1}{4}$.

Zadanie 7. [2014 maj, zad. 4. (3 pkt)]

Udowodnij, że dla każdych dwóch liczb rzeczywistych dodatnich x, y prawdziwa jest nierówność $(x+1)\frac{x}{y}+(y+1)\frac{y}{x}>2$.

Zadanie 8. [2015 czerwiec NF, zad. 8. (3 pkt)]

Niech $a = \log_{12} 2$. Wykaż, że $\log_6 64 = \frac{6a}{1-a}$.

Zadanie 9. [2015 maj NF, zad. 8. (3 pkt)]

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność

$$x^4 - x^2 - 2x + 3 > 0.$$

Zadanie 10. [2015 maj SF, zad. 1. (3 pkt)]

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x różnej od 1 oraz dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej y różnej od 1 prawdziwa jest równość

$$\log_x(xy) \cdot \log_y\left(\frac{y}{x}\right) = \log_y(xy) \cdot \log_x\left(\frac{y}{x}\right).$$

Zadanie 11. [2016 czerwiec NF, zad. 8. (4 pkt)]

Wykaż, że dla $a, b, c, d > 0$ prawdziwa jest nierówność $\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \ge \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$.

Zadanie 12. [2016 maj NF, zad. 8. (3 pkt)]

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y takich, że $x^2 + y^2 = 2$, prawdziwa jest nierówność $x + y \le 2$.

Zadanie 13. [2016 czerwiec SF, zad. 5. (3 pkt)]

Wykaż, że jeśli a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $a + b + c = 0$, to $3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$.

Zadanie 14. [2016 maj SF, zad. 7. (3 pkt)]

Reszta z dzielenia liczby naturalnej a przez 6 jest równa 1. Reszta z dzielenia liczby naturalnej b przez 6 jest równa 5. Uzasadnij, że liczba $a^2 - b^2$ jest podzielna przez 24.

Zadanie 15. [2017 czerwiec SF, zad. 2. (3 pkt)]

Wykaż, że dla $a = \log_{\frac{1}{5}} 3 + \log_5 \sqrt{27}$ i $b = \log_5 3 - \log_5 \sqrt[9]{3}$ prawdziwa jest równość $\frac{b}{a} = \frac{16}{9}$.

Zadanie 16. [2017 czerwiec NF, zad. 7. (3 pkt)]

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność

$$5x^2 + y^2 - 4xy + 6x + 9 \ge 0.$$

Zadanie 17. [2017 maj NF, zad. 7. (3 pkt); SF zad. 6]

Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność

$$x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0.$$

Zadanie 18. [2018 czerwiec SF, zad. 6. (3 pkt)]

Dodatnie liczby rzeczywiste a i b takie, że $a > b$, spełniają warunek $\log_2\left(\frac{a-b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$. Wykaż, że dla liczb a i b prawdziwa jest równość $a^2 + b^2 = 11ab$.

Zadanie 19. [2018 maj NF, zad. 8. (3 pkt); SF zad. 3]

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej k i dla każdej liczby całkowitej m liczba $k^3m - km^3$ jest podzielna przez 6.

Zadanie 20. [2019 maj NF, zad. 8. (3 pkt)]

Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y, takich że $x < y$, i dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej a, prawdziwa jest nierówność $\frac{x+a}{y+a} + \frac{y}{x} > 2$.

Zadanie 21. [2019 czerwiec NF, zad. 9. (3 pkt)]

Udowodnij, że dla każdej liczby nieparzystej n wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 19$ jest podzielne przez 16.

Zadanie 22. [2020 maj NF, zad. 9. (3 pkt)]

Liczby dodatnie a i b spełniają równość $a^2 + 2a = 4b^2 + 4b$. Wykaż, że $a = 2b$.

5. Ciągi

Zadanie 1. [2010 Informator CKE, zad. 24]

Dany jest ciąg (a_n) mający tę własność, że dla każdej liczby naturalnej n suma n początkowych wyrazów tego ciągu jest równa $\frac{1}{2}(7n^2 - n)$. Oblicz dwudziesty wyraz tego ciągu. Wykaż, że (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Zadanie 2. [2010 Informator CKE, zad. 31]

Wiedząc, że dla sum częściowych pewnego ciągu geometrycznego o wyrazach dodatnich prawdziwa jest równość $S_{14} = 5 \cdot S_7$, oblicz iloraz tego ciągu.

Zadanie 3. [2010 Informator CKE, zad. 35]

Wykaż, że jeżeli liczby b, c, $2b - a$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego to liczby ab, b^2, c^2 są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

Zadanie 4. [2010 maj, zad. 5. (5 pkt)]

O liczbach a, b, c wiemy, że ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny i $a + c = 10$, zaś ciąg $(a+1, b+4, c+19)$ jest geometryczny. Wyznacz te liczby.

Zadanie 5. [2010 sierpień, zad. 11. (5 pkt)]

Ciąg (a,b,c) jest geometryczny i $a+b+c=26$, zaś ciąg $(a-5,b-4,c-11)$ jest arytmetyczny. Oblicz a, b, c.

Zadanie 6. [2011 czerwiec, zad.3. (5 pkt)]

Ciąg (a, b, c) jest geometryczny. Ciąg $(3a+3, 2b, c-12)$ jest arytmetyczny i suma jego dwóch pierwszych wyrazów jest równa trzeciemu. Oblicz a, b, c.

Zadanie 7. [2011 maj, zad. 5. (4 pkt)]

O ciągu (x_n) dla $n \geq 1$ wiadomo, że:

a) ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 3^{x_n}$ dla $n \geq 1$ jest geometryczny o ilorazie $q = 27$.

b) $x_1 + x_2 + ... + x_{10} = 145$.

Oblicz x_1.

Zadanie 8. [2012 czerwiec, zad. 5. (5 pkt)]

W ciągu arytmetycznym (a_n), dla $n \geq 1$, dane są $a_1 = -2$ oraz różnica $r = 3$. Oblicz największe n takie, że $a_1 + a_2 + ... + a_n < 2012$.

Zadanie 9. [2012 maj, zad. 5. (6 pkt)]

Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Jeżeli do drugiej liczby dodamy 8, to ciąg ten zmieni się w arytmetyczny. Jeżeli zaś do ostatniej liczby nowego ciągu arytmetycznego dodamy 64, to tak otrzymany ciąg będzie znów geometryczny. Znajdź te liczby. Uwzględnij wszystkie możliwości.

Zadanie 10. [2013 czerwiec, zad. 10. (4 pkt)]

Liczby $a_1, a_2, ..., a_n$ są dodatnie i w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny. Uzasadnij, że prawdziwa jest równość $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} = \sqrt{a_1 \cdot a_n}$.

Zadanie 11. [2013 maj, zad. 5. (5 pkt)]

Ciąg liczbowy (a, b, c) jest arytmetyczny i $a+b+c=33$, natomiast ciąg $(a-1, b+5, c+19)$ jest geometryczny. Oblicz a, b, c.

Zadanie 12. [2013 grudzień, zad. 7. (2 pkt)]

Oblicz granicę ciągu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-5n+2}{(8n+7)(n+4)}$.

Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego obliczonej granicy.

Zadanie 13. [2014 czerwiec, zad. 8. (6 pkt)]

Trzy liczby są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, którego iloraz jest różny od 1. Jeżeli weźmiemy kolejno drugą z nich, pierwszą i trzecią, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Jeżeli pierwszy wyraz tego ciągu arytmetycznego zmniejszymy o 7, drugi pozostawimy bez zmian, a trzeci zwiększymy o 3, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Oblicz te liczby.

Zadanie 14. [2014 grudzień NF, zad. 8. (2 pkt)]

Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+2}-\frac{(n+2)^2}{n+444}\right)$.

Zadanie 15. [2014 grudzień NF, zad. 12. (3 pkt)]

Niech P_n oznacza pole koła o promieniu $\frac{1}{2^n}$, dla $n\geq 1$. Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (P_n).

Zadanie 16. [2014 Informator CKE, zad. 10. (2 pkt)]

Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n^3+3n}{(1-4n)^3}$.

Zakoduj pierwsze trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 17. [2014 Informator CKE, zad. 11. (2 pkt)]

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) o wyrazach dodatnich taki, że $a_1=\frac{3}{4}$, $a_3=\frac{1}{3}$. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

Zadanie 18. [2014 maj, zad. 7. (6 pkt)]

Ciąg geometryczny (a_n) ma 100 wyrazów i są one liczbami dodatnimi. Suma wszystkich wyrazów o numerach nieparzystych jest sto razy większa od sumy wszystkich wyrazów o numerach parzystych oraz $\log a_1+\log a_2+\log a_3+\ldots+\log a_{100}=100$. Oblicz a_1.

Zadanie 19. [2015 maj NF, zad. 6. (2 pkt)]

Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{11n^3+6n+5}{6n^3+1}-\frac{2n^2+2n+1}{5n^2-4}\right)$. W poniższe kratki wpisz kolejno cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 20. [2015 maj SF, zad. 4. (6 pkt)]

Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli do pierwszej z nich dodamy 5, do drugiej 3, a do trzeciej 4, to otrzymamy rosnący ciąg geometryczny, w którym trzeci wyraz jest cztery razy większy od pierwszego. Znajdź te liczby.

Zadanie 21. [2016 czerwiec NF, zad. 6. (2 pkt)]

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) określony dla $n \geq 1$, w którym iloraz jest równy pierwszemu wyrazowi, a suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 12. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu. Zakoduj kolejno pierwsze trzy cyfry po przecinku otrzymanego wyniku.

Zadanie 22. [2016 czerwiec NF, zad. 10. (3 pkt)]

Dany jest ciąg (a_n) określony dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$, w którym $a_4 = 4$ oraz dla każdej liczby $n \geq 1$ prawdziwa jest równość $a_{n+1} = a_n + n - 4$. Oblicz pierwszy wyraz ciągu (a_n) i ustal, czy ciąg ten jest malejący.

Zadanie 23. [2016 maj NF, zad. 7. (2 pkt)]

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem $a_n = \left(\frac{1}{2x - 371}\right)^n$ dla $n \geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie. Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą x, dla której nieskończony szereg $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ jest zbieżny.

Zadanie 24. [2016 czerwiec SF, zad. 4. (3 pkt)]

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 3n + 2 \quad \text{dla} \quad n \geq 1. \end{cases}$

Oblicz średnią arytmetyczną liczb $a_2 + 3$ i $a_3 + 2$.

Zadanie 25. [2016 maj SF, zad. 4. (6 pkt)]

Ciąg $(a, 4, b, c)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(a, a+b, 4c)$ jest geometryczny. Oblicz a, b i c.

Zadanie 26. [2017 czerwiec NF zad. 10. (5 pkt), SF zad. 3]

Ciąg (a_n) jest arytmetyczny, a ciąg (b_n) jest geometryczny. Pierwszy wyraz a_1 ciągu arytmetycznego jest ilorazem ciągu geometrycznego (b_n). Wyrazy ciągu (a_n) są liczbami całkowitymi, a suma ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 124. Natomiast pierwszy wyraz b_1 ciągu geometrycznego jest różnicą ciągu arytmetycznego (a_n). Suma dwóch pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego (b_n) jest równa 18. Wyznacz te ciągi.

Zadanie 27. [2017 maj NF, zad. 14. (6 pkt); SF zad. 4]

Liczby a, b, c są – odpowiednio – pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Suma tych liczb jest równa 27. Ciąg $(a-2, b, 2c+1)$ jest geometryczny. Wyznacz liczby a, b, c.

Zadanie 28. [2018 czerwiec NF, zad. 10. (4 pkt); SF zad. 4]

Dany jest rosnący ciąg geometryczny (a, aq, aq^2), którego wszystkie wyrazy i iloraz są liczbami całkowitymi nieparzystymi. Jeśli największy wyraz ciągu zmniejszymy o 4, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Oblicz wyraz aq tego ciągu.

Zadanie 29. [2018 czerwiec NF, zad. 11. (4 pkt)]

Dany jest nieskończony ciąg okręgów (o_n) o równaniach $x^2+y^2=2^{11-n}$, $n\geq 1$. Niech P_k będzie pierścieniem ograniczonym zewnętrznym okręgiem o_{2k-1} i wewnętrznym okręgiem o_{2k}. Oblicz sumę pól wszystkich pierścieni P_k, gdzie $k\geq 1$.

Zadanie 30. [2018 maj NF, zad. 13. (4 pkt)]

Wyrazy ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla $n\geq 1$, spełniają układ równań

$$\begin{cases} a_3+a_6=-84 \\ a_4+a_7=168 \end{cases}$$

Wyznacz liczbę n początkowych wyrazów tego ciągu, których suma S_n jest równa 32769.

Zadanie 31. [2018 maj SF, zad. 2. (5 pkt)]

Liczby a, b, c, spełniające warunek $3a+b+3c=77$, są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Ciąg $(a, b+1, 2c)$ jest geometryczny. Wyznacz liczby a, b, c oraz podaj wyrazy ciągu geometrycznego.

Zadanie 32. [2019 maj NF, zad. 12. (6 pkt)]

Trzywyrazowy ciąg $(a,\ b,\ c)$ o wyrazach dodatnich jest arytmetyczny, natomiast ciąg $\left(\frac{1}{a}, \frac{2}{3b}, \frac{1}{2a+2b+c}\right)$ jest geometryczny. Oblicz iloraz ciągu geometrycznego.

Zadanie 33. [2019 maj SF, zad. 4. (5 pkt)

Ciąg (a,b,c) jest geometryczny, ciąg $(a+1, b+5, c)$ jest malejącym ciągiem arytmetycznym oraz $a+b+c=39$. Oblicz a, b, c.

Zadanie 34. [2019 czerwiec SF, zad. 12. (6 pkt)]

W ciągu geometrycznym $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)$ suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 182, a stosunek sumy wyrazów o numerach nieparzystych do sumy wyrazów o numerach parzystych jest równy $\frac{1}{3}$. Wyznacz wszystkie wyrazy tego ciągu.

Zadanie 35. [2020 maj NF, zad. 10. (5 pkt)]

W trzywyrazowym ciągu geometrycznym (a_1, a_2, a_3) spełniona jest równość $a_1+a_2+a_3=\frac{21}{4}$. Wyrazy a_1, a_2, a_3 są – odpowiednio – czwartym, drugim i pierwszym wyrazem rosnącego ciągu arytmetycznego. Oblicz a_1.

6. Funkcja Trygonometryczne

Zadanie 1. [2015 maj SF, zad. 5. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $\sin^2 2x-4\sin^2 x+1=0$ w przedziale $\langle 0,2\pi\rangle$.

Zadanie 2. [2016 czerwiec NF, zad. 13. (3 pkt) *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Rozwiąż nierówność $(2\sin x-3)(2\sin x+1)>0$ w przedziale $x\in(0,2\pi)$.

Zadanie 3. [2016 maj NF, zad. 11. (4 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Rozwiąż nierówność $\frac{2\cos x-\sqrt{3}}{\cos^2 x}<0$ w przedziale $\langle 0,2\pi\rangle$.

Zadanie 4. [2016 czerwiec SF, zad. 2. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $\sin^3 x-3\sin x\cdot\cos^2 x-3\cos^3 x+\sin^2 x\cdot\cos x=0$ w przedziale $\langle 0,\pi\rangle$.

Zadanie 5. [2016 maj SF, zad. 3. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $-2\cos^2 x+3\sin x+3=0$ w przedziale $<0,2\pi>$.

Zadanie 6. [2017 czerwiec SF, zad. 4. (5 pkt)]

Rozwiąż równanie $2\cos^4 x+5\sin^2 x=3$ w przedziale $\langle 0,\pi\rangle$.

Zadanie 7. [2017 czerwiec NF, zad. 11. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $3\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$ w przedziale $\langle 0,2\pi\rangle$.

Zadanie 8. [2017 maj NF, zad. 10. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $\cos 2x+3\cos x=-2$ w przedziale $\langle 0,2\pi\rangle$.

Zadanie 9. [2018 czerwiec NF, zad. 7. (3 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Udowodnij, że dla dowolnego kąta $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ prawdziwa jest nierówność

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}-\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}+\alpha\right)<\frac{1}{4}.$$

Zadanie 10. [2018 czerwiec SF, zad. 2. (5 pkt)]

Rozwiąż równanie $4\sin x\cdot\cos^2 x-1=2\sin 2x-\cos x$ w przedziale $(0,2\pi)$.

Zadanie 11. [2018 maj NF, zad. 11. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $\sin 6x+\cos 3x=2\sin 3x+1$ w przedziale $\langle 0,\pi\rangle$.

Zadanie 12. [2018 maj SF, zad. 7. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $2\cos^2 x+3\sin x=0$ w przedziale $\left\langle -\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\rangle$.

Zadanie 13. [2019 maj NF, zad. 14. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $(\cos x)\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{1}{2}\sin x$.

Zadanie 14. [2019 maj SF, zad. 7. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $\cos 2x=\sin x+1$ w przedziale $\langle 0,2\pi\rangle$.

Zadanie 15. [2019 czerwiec NF, zad. 14. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $4\sin 7x\cos 2x = 2\sin 9x - 1$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

Zadanie 16. [2019 czerwiec SF, zad. 7. (4 pkt)]

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $\sin^2 2x = 2\cos^2 x$ należące do przedziału $(0, 2\pi)$.

Zadanie 17. [2020 maj NF, zad. 9. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $3\cos 2x + 10\cos^2 x = 24\sin x - 3$ dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

7. Wartość Bezwzględna

Zadanie 1. [2014 czerwiec, zad. 1. (4 pkt)]

Rozwiąż nierówność $|x+6| - 2|x-4| \leqslant 2x - 3$.

Zadanie 2. [2014 Informator CKE, zad. 3. (2 pkt)]

Oblicz najmniejszą liczbę naturalną n spełniającą nierówność $\left|\frac{2n-10}{3n+1} - \frac{2}{3}\right| < \frac{1}{30}$.

Zadanie 3. [2014 Informator CKE, zad. 4. (2 pkt)]

Równanie $x^2 + 48x + 2 = 0$ ma dwa rozwiązania x_1, x_2. Liczba $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ jest liczbą całkowitą dodatnią. Znajdź tę liczbę. Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Zadanie 4. [2015 maj, SF zad. 6. (4 pkt)]

Rozwiąż nierówność $|2x-6| + |x+7| \geq 17$.

Zadanie 5. [2016 czerwiec NF, zad. 9. (4 pkt)]

Rozwiąż nierówność $\left|x^2 - 3x + 2\right| \geq |x-1|$.

Zadanie 6. [2016 czerwiec SF, zad. 1. (4 pkt)]

Rozwiąż nierówność $|x+5| + |x-6| \leq 9 - x$.

Zadanie 7. [2017 czerwiec SF, zad. 1. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $2|x+1| - |x-2| = 9$.

Zadanie 8. [2017 maj SF, zad. 1. (4 pkt)]

Rozwiąż nierówność $|x-1| + |x-5| \leq 10 - 2x$.

Zadanie 9[2018 czerwiec SF, zad. 1. (4 pkt)]

Rozwiąż nierówność $|2x-1| + x \leq 5 + |x+5|$.

Zadanie 10. [2018 maj SF, zad. 1. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $3|x+2| = |x-3| + 11$.

Zadanie 11[2020 maj NF, zad. 6. (2 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których równanie $|x-5|=(a-1)^2-4$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie.

8. Planimetria

Zadanie 1. [2014 czerwiec, zad. 2. (4 pkt)]

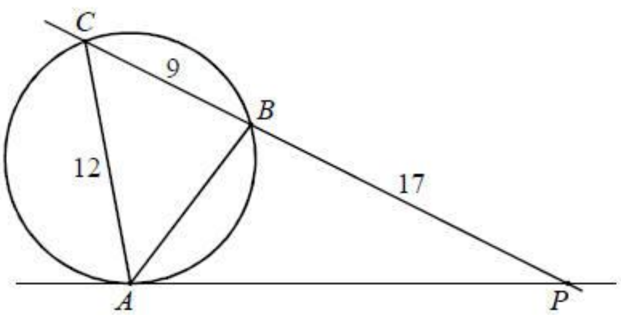
W czworokąt $ABCD$, w którym $|AD|=5\sqrt{3}$ i $|CD|=6$, można wpisać okrąg. Przekątna BD tworzy z bokiem AB czworokąta kąt o mierze 60°, natomiast z bokiem AD tworzy kąt, którego sinus jest równy $\frac{3}{4}$. Wyznacz długości boków AB i BC oraz długość przekątnej BD tego czworokąta.

Zadanie 2. [2014 grudzień, zad. 7. (2 pkt)]

Długości boków prostokąta są równe 3 oraz 5. Oblicz sinus kąta ostrego, który tworzą przekątne tego prostokąta.

Zadanie 3. [2014 Informator CKE, zad. 17. (3 pkt)]

Dany jest trójkąt ABC i prosta k styczna w punkcie A do okręgu opisanego na tym trójkącie. Prosta BC przecina prostą k w punkcie P. Długości odcinków AC, BC i PB zostały podane na rysunku.



Oblicz długość odcinka AB. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 4. [2014 maj, zad. 5. (5 pkt)]

Dane są trzy okręgi o środkach A, B, C i promieniach równych odpowiednio r, $2r$, $3r$. Każde dwa z tych okręgów są zewnętrznie styczne: pierwszy z drugim w punkcie K, drugi z trzecim w punkcie L i trzeci z pierwszym w punkcie M. Oblicz stosunek pola trójkąta KLM do pola trójkąta ABC.

Zadanie 5. [2015 czerwiec NF, zad. 11. (4 pkt)]

W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 15 i 20 wpisano okrąg. Oblicz długość odcinka łączącego wierzchołek kąta prostego tego trójkąta z punktem wspólnym okręgu i przeciwprostokątnej.

Zadanie 6. [2015 maj NF, zad. 10. (4 pkt)]

Długości boków czworokąta $ABCD$ są równe: $|AB| = 2$, $|BC| = 3$, $|CD| = 4$, $|DA| = 5$. Na czworokącie $ABCD$ opisano okrąg. Oblicz długość przekątnej AC tego czworokąta.

Zadanie 7. [2015 maj SF, zad. 8. (4 pkt)]

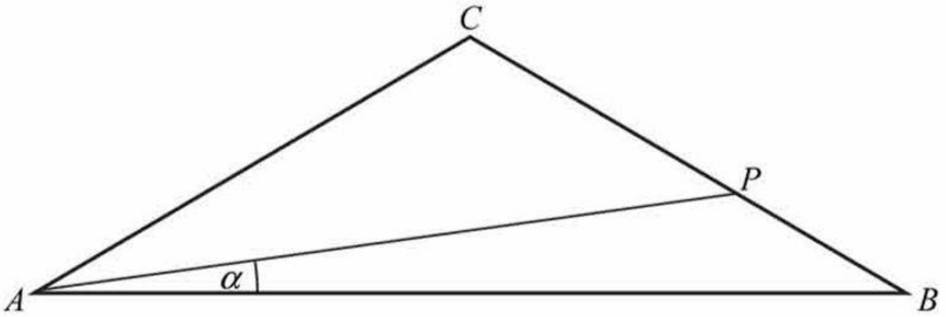
Na boku AB trójkąta równobocznego ABC wybrano punkt D taki, że $|AD| : |DB| = 2 : 3$. Oblicz tangens kąta ACD.

Zadanie 8. [2016 czerwiec NF, zad. 14. (4 pkt)]

W trójkącie prostokątnym stosunek różnicy długości przyprostokątnych do długości przeciwprostokątnej jest równy $\frac{1}{2}$. Oblicz cosinusy kątów ostrych tego trójkąta.

Zadanie 9. [2016 czerwiec SF, zad. 10. (4 pkt)]

Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AC| = |BC| = 10$, $|\sphericalangle ACB| = 120°$. Na boku CB obrano punkt P dzielący ten bok w stosunku $3:2$ (licząc od punktu C). Oblicz sinus kąta PAB.



Zadanie 10. [2016 maj SF, zad. 5. (6 pkt)]

W trapezie równoramiennym $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, dane są $|AB| = 84$, $|CD| = 36$, $|BC| = |AD| = 40$. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt ABP, gdzie P jest punktem przecięcia przekątnych tego trapezu.

Zadanie 11. [2017 czerwiec SF, zad. 10. (6 pkt); NF zad. 14]

Trapez równoramienny $ABCD$ o ramieniu długości 6 wpisany jest w okrąg, przy czym dłuższa podstawa AB trapezu, o długości 12, jest średnicą tego okręgu. Przekątne AC i BD trapezu przecinają się w punkcie P. Oblicz pole koła wpisanego w trójkąt ABP.

Zadanie 12. [2017 maj SF, zad. 9. (6 pkt)]

W trójkącie równoramiennym wysokość opuszczona na podstawę jest równa 36, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 10. Oblicz długości boków tego trójkąta i promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zadanie 13. [2018 czerwiec NF, zad. 12. (5 pkt)]

Trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD jest opisany na okręgu. Ramię BC ma długość 10, a ramię AD jest wysokością trapezu. Podstawa AB jest 2 razy dłuższa od podstawy CD. Oblicz pole tego trapezu.

Zadanie 14. [2018 maj SF, zad. 3. (5 pkt)]

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $|AD|=|AB|=|BC|=a$, $|\sphericalangle BAD|=60^\circ$ i $|\sphericalangle ADC|=135^\circ$. Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

Zadanie 15. [2019 maj NF, zad. 10. (4 pkt)]

Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC oraz $|AC|=16$, $|AD|=6$, $|CD|=14$ i $|BC|=|BD|$. Oblicz obwód trójkąta ABC.

Zadanie 16. [2019 czerwiec NF, zad. 10. (4 pkt)]

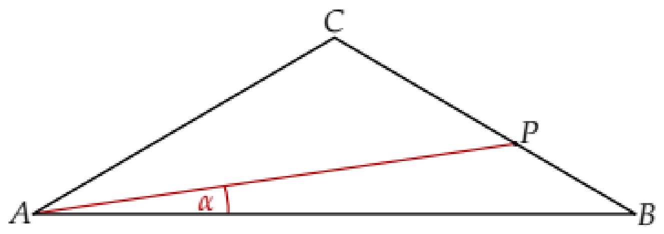
Miara kąta wewnętrznego n-kąta foremnego jest o 2° mniejsza od miary kąta wewnętrznego $(n+2)$-kąta foremnego. Oblicz n.

Zadanie 17. [2020 maj NF, zad. 5. (2 pkt)]

W trójkącie ABC bok AB jest 3 razy dłuższy od boku AC, a długość boku BC stanowi $\frac{4}{5}$ długości boku AB. Oblicz cosinus najmniejszego kąta trójkąta ABC.

Zadanie 18. [2020 maj SF, zad. 8. (4 pkt)]

W trójkącie równoramiennym ABC: $|AC| = |BC| = 10$, a miara kąta ABC jest równa 30°. Na boku BC wybrano punkt P, taki, że $\frac{|BP|}{|PC|} = \frac{2}{3}$. Oblicz sinus kąta α (zobacz rysunek).



9. Geometria Analityczna

Zadanie 1. [2014 czerwiec, zad. 7. (6 pkt)]

Odcinek AB o długości 4 jest zawarty w prostej o równaniu $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$. Symetralna odcinka AB przecina oś Oy w punkcie $P = (0, 6)$. Oblicz współrzędne końców odcinka AB.

Zadanie 2. [2014 grudzień, zad. 17. (6 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Dany jest okrąg o_0 o równaniu $(x-3)^2+(y-1)^2=1$. W pierwszej „ćwiartce" układu współrzędnych istnieją dwa okręgi o_1, o_2 styczne zewnętrznie do okręgu o_0 i jednocześnie styczne do obu osi układu współrzędnych. Oblicz odległość środków okręgów o_1 oraz o_2.

Zadanie 3. [2014 Informator CKE, zad. 20. (4 pkt)]

Okrąg jest styczny do osi Ox w punkcie $A=(2,0)$. Punkt $B=(-1,9)$ leży na tym okręgu. Wyznacz równanie tego okręgu.

Zadanie 4. [2014 Informator CKE, zad. 21. (5 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Okrąg o środku $S=(3,2)$ leży wewnątrz okręgu o równaniu $(x-6)^2+(y-8)^2=100$ i jest do niego styczny. Wyznacz równanie prostej stycznej do obu tych okręgów.

Zadanie 5. [2014 maj, zad. 8. (4 pkt)]

Punkty A, B, C, D, E, F są kolejnymi wierzchołkami sześciokąta foremnego, przy czym $A=(0,2\sqrt{3})$, $B=(2,0)$, a C leży na osi Ox. Wyznacz równanie stycznej do okręgu opisanego na tym sześciokącie przechodzącej przez wierzchołek E.

Zadanie 6. [2015 czerwiec NF, zad. 7. (2 pkt)]

Prosta o równaniu $y=\frac{3}{4}x-\frac{61}{14}$ jest styczna od okręgu o środku $S=(1,-4)$. Wyznacz promień tego okręgu.

Zadanie 7. [2015 maj SF, zad. 9. (5 pkt)]

Wyznacz równania prostych stycznych do okręgu o równaniu $x^2+y^2+4x-6y-3=0$ i zarazem prostopadłych do prostej $x+2y-6=0$.

Zadanie 8. [2016 czerwiec NF, zad. 16. (5 pkt)]

Punkty $A=(-7,-2)$ i $B=(4,-7)$ są wierzchołkami podstawy trójkąta równoramiennego ABC, a wysokość opuszczona z wierzchołka A tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $2x+19y+52=0$. Oblicz współrzędne wierzchołka C.

Zadanie 9. [2016 maj NF, zad. 13. (5 pkt)]

Punkty $A=(30, 32)$ i $B=(0, 8)$ są sąsiednimi wierzchołkami czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg. Prosta o równaniu $x-y+2=0$ jest jedyną osią symetrii tego czworokąta i zawiera przekątną AC. Oblicz współrzędne wierzchołków C i D tego czworokąta.

Zadanie 10. [2016 czerwiec SF, zad. 6. (4 pkt)]

Wyznacz równania stycznych do okręgu $x^2+y^2+12x+4y+36=0$, przechodzących przez początek układu współrzędnych.

Zadanie 11. [2016 maj SF, zad. 6. (6 pkt)]

Punkty $A=(1,1)$ i $B=(6,2)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wysokości trójkąta ABC przecinają się w punkcie $M=(3,3)$. Oblicz pole tego trójkąta.

Zadanie 12. [2017 czerwiec NF, zad. 12. (5 pkt); zad. 6 SF]

Prosta l, na której leży punkt $P=(8,2)$, tworzy z dodatnimi półosiami układu współrzędnych trójkąt prostokątny o polu równym 36. Wyznacz równanie prostej l.

Zadanie 13. [2017 maj NF, zad. 13. (5 pkt); zad. 11 SF]

Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A=(-5,3)$ i $B=(0,6)$, którego środek leży na prostej o równaniu $x-3y+1=0$.

Zadanie 14. [2018 czerwiec NF, zad. 13. (5 pkt); zad. 5 SF]

Wierzchołki A i B trójkąta prostokątnego ABC leżą na osi Oy układu współrzędnych. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków AB, BC i CA w punktach – odpowiednio – $P=(0,10)$, $Q=(8,6)$ i $R=(9,13)$. Oblicz współrzędne wierzchołków A, B i C tego trójkąta.

Zadanie 15. [2018 maj NF, zad. 14. (6 pkt); zad. 10 SF]

Punkt $A=(7,-1)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC|=|BC|$. Obie współrzędne wierzchołka C są liczbami ujemnymi. Okrąg wpisany w trójkąt ABC ma równanie $x^2+y^2=10$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.

Zadanie 16. [2019 maj NF, zad. 11. (6 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Dane są okręgi o równaniach $x^2+y^2-12x-8y+43=0$ i $x^2+y^2-2ax+4y+a^2-77=0$. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których te okręgi mają dokładnie jeden punkt wspólny. Rozważ wszystkie przypadki.

Zadanie 17. [2019 czerwiec NF, zad. 13. (6 pkt)]

Punkt $A=(-2,6)$ jest wierzchołkiem rombu $ABCD$ o polu 90. Przekątna BD zawiera się w prostej l o równaniu $2x-y-5=0$. Wyznacz długość boku tego rombu.

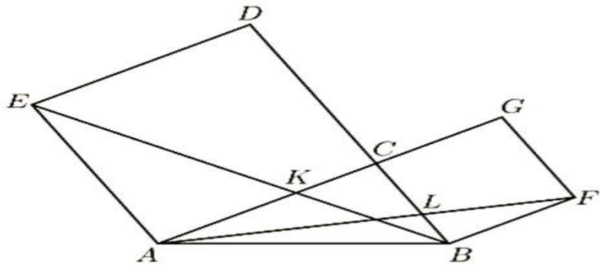
Zadanie 18. [2020 maj NF, zad. 12. (5 pkt)]

Prosta o równaniu $x+y-10=0$ przecina okrąg o równaniu $x^2+y^2-8x-6y+8=0$ w punktach K i L. Punkt S jest środkiem cięciwy KL. Wyznacz równanie obrazu tego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k=-3$.

10. Dowody Geometryczne

Zadanie 1. [2014 czerwiec, zad. 5. (3 pkt)]

Na przyprostokątnych AC i BC trójkąta prostokątnego ABC zbudowano, na zewnątrz trójkąta, kwadraty $ACDE$ i $BFGC$. Odcinek AF przecina przyprostokątną BC w punkcie L, a odcinek BE przecina przyprostokątną AC w punkcie K (zobacz rysunek). Udowodnij, że $|KC| = |LC|$.

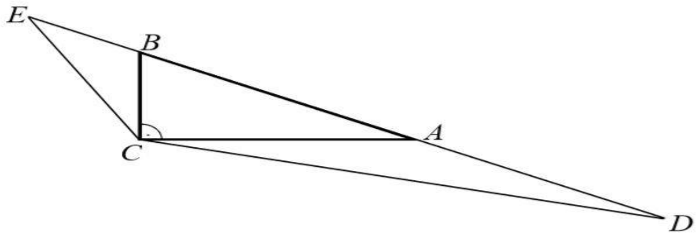


Zadanie 2. [2014 grudzień, zad. 15. (3 pkt)]

Punkt E jest środkiem boku BC prostokąta $ABCD$, w którym $AB > BC$. Punkt F leży na boku CD tego prostokąta oraz $\sphericalangle AEF = 90°$. Udowodnij, że $\sphericalangle BAE = \sphericalangle EAF$.

Zadanie 3. [2014 Informator CKE, zad. 18. (6 pkt)]

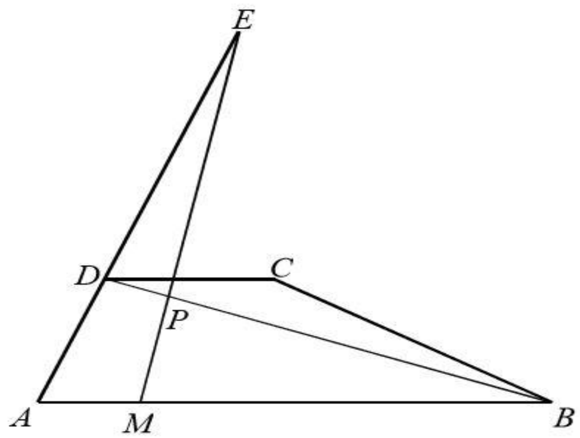
Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C i obwodzie równym $2p$. Na prostej AB obrano punkty D i E leżące na zewnątrz odcinka AB takie, że $|AD| = |AC|$ i $|BE| = |BC|$ (zobacz rysunek).



Wykaż, że promień okręgu opisanego na trójkącie ECD jest równy $p\sqrt{2}$.

Zadanie 4. [2014 Informator CKE, zad. 19. (3 pkt)]

Ramię AD trapezu $ABCD$ (w którym $AB \parallel CD$) przedłużono do punktu E takiego, że $|AE| = 3 \cdot |AD|$. Punkt M leży na podstawie AB oraz $|MB| = 4 \cdot |AM|$. Odcinek ME przecina przekątną BD w punkcie P (zobacz rysunek).



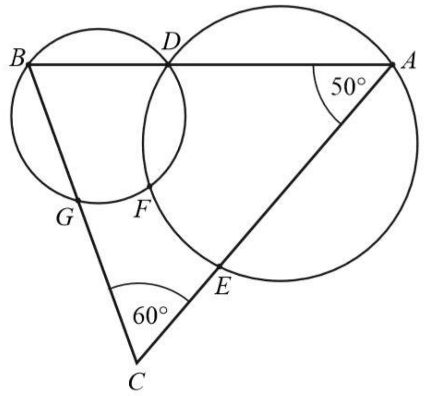
Udowodnij, że $|BP| = 6 \cdot |PD|$.

Zadanie 5. [2014 maj, zad. 6. 3 pkt)]

Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku S. Kąty wewnętrzne CAB, ABC i BCA tego trójkąta są równe, odpowiednio, α, 2α i 4α. Wykaż, że trójkąt ABC jest rozwartokątny, i udowodnij, że miary wypukłych kątów środkowych ASB, ASC i BSC tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny.

Zadanie 6. [2015 czerwiec NF, zad. 9. (3 p

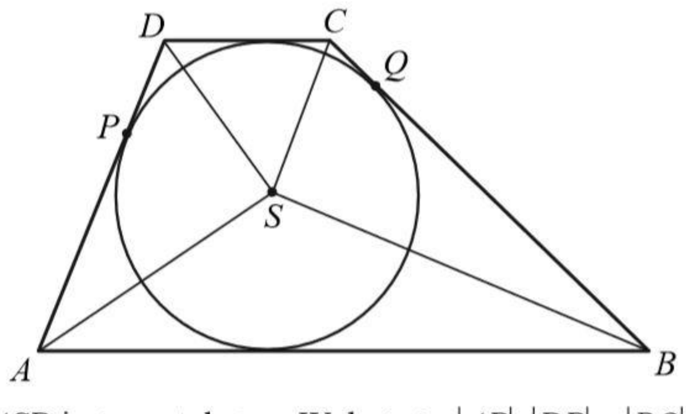
W trójkącie ABC kąt wewnętrzny przy wierzchołku A ma miarę $50°$, a kąt wewnętrzny przy wierzchołku C ma miarę $60°$. Okrąg o_1 przechodzi przez punkt A i przecina boki AB i AC trójkąta odpowiednio w punktach D i E. Okrąg o_2 przechodzi przez punkt B, przecina okrąg o_1 w punkcie D oraz w punkcie F leżącym wewnątrz trójkąta ABC. Ponadto okrąg o_2 przecina bok BC trójkąta w punkcie G.



Udowodnij, że na czworokącie $CEFG$ można opisać okrąg.

Zadanie 7. [2015 czerwiec SF, zad. 4. (3 pkt)]

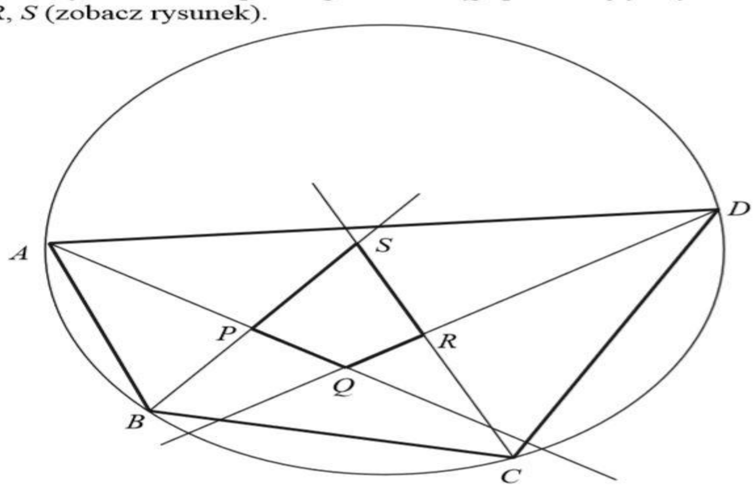
W trapez $ABCD$ wpisano okrąg o środku S. Okrąg ten jest styczny do ramion AD i BC tego trapezu w punktach odpowiednio P i Q (zobacz rysunek).



Uzasadnij, że trójkąt ASD jest prostokątny. Wykaż, że $|AP| \cdot |DP| = |BQ| \cdot |CQ|$.

Zadanie 8. [2015 maj NF, zad. 9. (3 pkt)]

Dwusieczne czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg przecinają się w czterech różnych punktach: P, Q, R, S (zobacz rysunek).



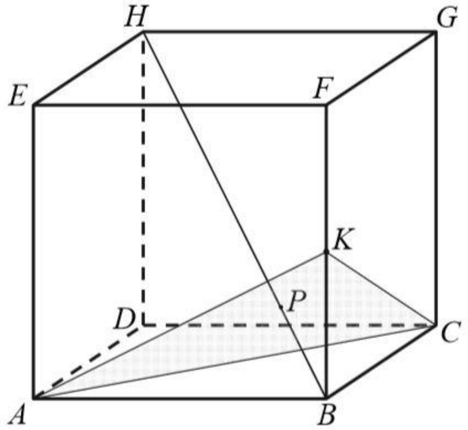
Wykaż, że na czworokącie $PQRS$ można opisać okrąg.

Zadanie 9. [2015 maj SF, zad. 7. (4 pkt)]

O trapezie $ABCD$ wiadomo, że można w niego wpisać okrąg, a ponadto długości jego boków AB, BC, CD, AD – w podanej kolejności – tworzą ciąg geometryczny. Uzasadnij, że trapez $ABCD$ jest rombem.

Zadanie 10. [2016 czerwiec NF, zad. 11. (3 pkt)]

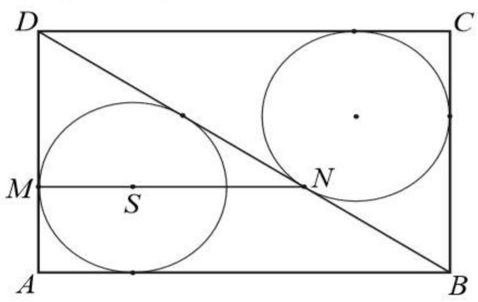
Dany jest sześcian $ABCDEFGH$. Przez wierzchołki A i C oraz środek K krawędzi BF poprowadzono płaszczyznę, która przecina przekątną BH w punkcie P (zobacz rysunek).



Wykaż, że $|BP|:|HP|=1:3$.

Zadanie 11. [2016 maj NF, zad. 9. (3 pkt)]

Dany jest prostokąt $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie N. Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boku AD w punkcie M, a środek S tego okręgu leży na odcinku MN, jak na rysunku.



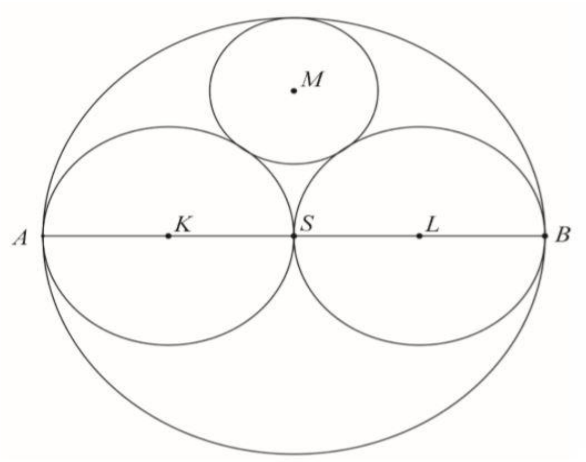
Wykaż, że $|MN|=|AD|$.

Zadanie 12. [2016 czerwiec SF, zad. 9. (4 pkt)]

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym: $|AB| = |BC|$, $|\sphericalangle DAB| = 45^\circ$, $|\sphericalangle ABC| = 150^\circ$, $|\sphericalangle BCD| = 60^\circ$. Wykaż, że trójkąt BCD jest równoboczny.

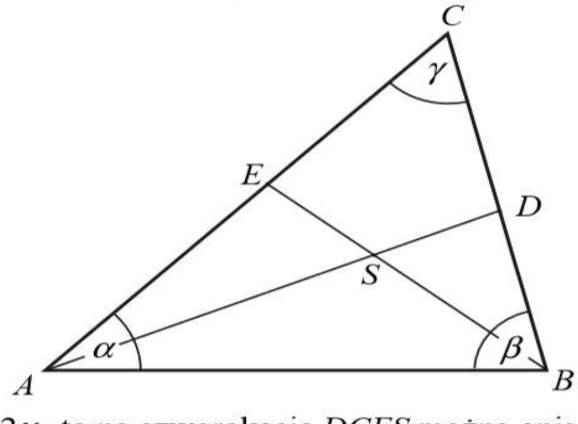
Zadanie 13. [2016 maj SF, zad. 9. (3 pkt)]

Dany jest okrąg o średnicy AB i środku S oraz dwa okręgi o średnicach AS i BS. Okrąg o środku M i promieniu r ma z każdym z danych okręgów dokładnie jeden punkt wspólny (zobacz rysunek). Wykaż, że $r = \frac{1}{6}|AB|$.



Zadanie 14. [2017 czerwiec SF, zad. 5. (3 pkt)]

Miary kątów trójkąta ABC są równe $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|$ i $\gamma = |\sphericalangle ACB|$. Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt, a proste zawierające odcinki AS i BS przecinają boki BC i AC tego trójkąta w punktach odpowiednio D i E (zobacz rysunek).



Wykaż, że jeżeli $\alpha + \beta = 2\gamma$, to na czworokącie $DCES$ można opisać okrąg.

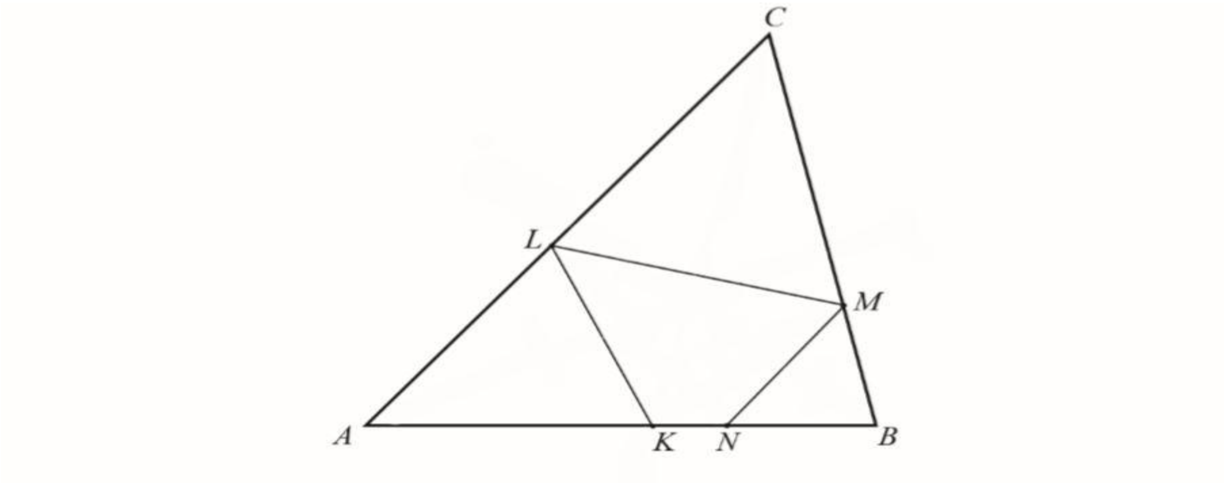
Zadanie 15. [2017 maj NF, zad. 8. (3 pkt); SF zad. 6]

W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB ma długość c, długość boku BC jest równa a oraz $|\sphericalangle ABC| = \beta$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC trójkąta w punkcie E.

Wykaż, że długość odcinka BE jest równa $\dfrac{2ac \cdot \cos\frac{\beta}{2}}{a+c}$.

Zadanie 16. [2018 maj NF, zad. 7. (3 pkt); zad. 5]

Trójkąt ABC jest ostrokątny oraz $|AC|>|BC|$. Dwusieczna d_C kąta ACB przecina bok AB w punkcie K. Punkt L jest obrazem punktu K w symetrii osiowej względem dwusiecznej d_A kąta BAC, punkt M jest obrazem punktu L w symetrii osiowej względem dwusiecznej d_C kąta ACB, a punkt N jest obrazem punktu M w symetrii osiowej względem dwusiecznej d_B kąta ABC (zobacz rysunek).



Udowodnij, że na czworokącie $KNML$ można opisać okrąg.

Zadanie 17. [2018 czerwiec NF, zad. 6. (3 pkt); SF zad.5]

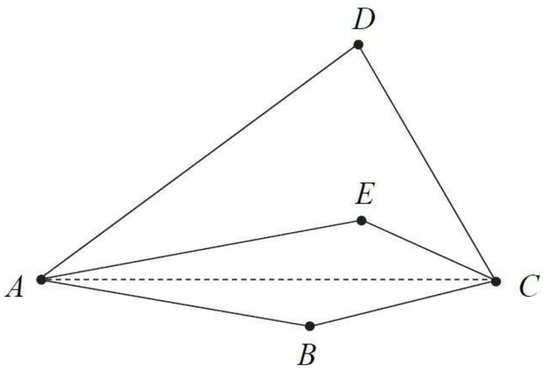
W trójkącie ABC kąt BAC jest dwa razy większy od kąta ABC. Wykaż, że prawdziwa jest równość $|BC|^2-|AC|^2=|AB|\cdot|AC|$.

Zadanie 18. [2019 maj NF, zad. 9. (3 pkt)]

Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC|=|BC|$. Na ramieniu AC tego trójkąta wybrano punkt M ($M\neq A$ i $M\neq C$), a na ramieniu BC wybrano punkt N, w taki sposób, że $|AM|=|CN|$. Przez punkty M i N poprowadzono proste prostopadłe do podstawy AB tego trójkąta, które wyznaczają na niej punkty S i T. Udowodnij, że $|ST|=\frac{1}{2}|AB|$.

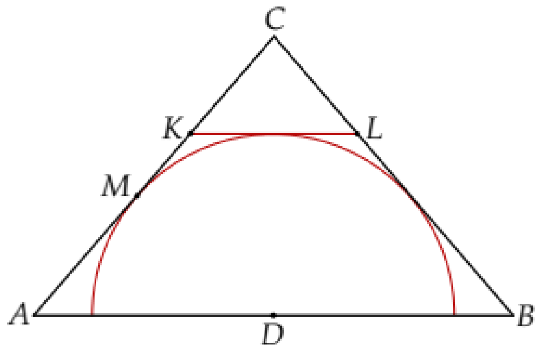
Zadanie 19. [2019 czerwiec NF, zad. 8. (3 pkt)]

Dwusieczne kątów BAD i BCD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie E, przy czym punkty B i E leżą po przeciwnych stronach prostej AC (zobacz rysunek).



Wykaż, że $|\sphericalangle ABC|-|\sphericalangle ADC|+2\cdot|\sphericalangle AEC|=360^\circ$.

Zadanie 20. [2020 maj NF, zad. 8. (3 pkt)]
Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC| = 6$, a punkt D jest środkiem podstawy AB. Okrąg o środku D jest styczny do prostej AC w punkcie M. Punkt K leży na boku AC, punkt L leży na boku BC, odcinek KL jest styczny do rozważanego okręgu oraz $|KC| = |LC| = 2$ (zobacz rysunek).



Wykaż, że $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{4}{5}$.

11. Kombinatoryka

Zadanie 1. [2014 Informator CKE, zad. 31. (3 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Oblicz, ile jest wszystkich liczb siedmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero i na dokładnie dwóch miejscach stoją cyfry parzyste.

Zadanie 2. [2014 Informator CKE, zad. 32. (4 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*
Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2 i 3, wiedząc, że cyfry mogą się powtarzać.

Zadanie 3. [2014 Informator CKE, zad. 33. (7 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*
Oblicz, ile jest wszystkich liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 24.

Zadanie 4. [2014 Informator CKE, zad. 34. (6 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*
Oblicz, ile jest wszystkich liczb stucyfrowych o sumie cyfr równej 5, w zapisie których występują tylko cyfry 0, 1, 3, 5.

Zadanie 5. [2015 czerwiec NF, zad. 13. (5 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*
Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych parzystych, w których zapisie występują co najwyżej dwie dwójki.

Zadanie 6. [2016 czerwiec NF, zad. 15. (4 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*
Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, w których zapisie występują dokładnie trzy cyfry nieparzyste.

Zadanie 7. [2016 maj NF, zad. 14. (3 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*
Rozpatrujemy wszystkie liczby naturalne dziesięciocyfrowe, w zapisie których mogą występować wyłącznie cyfry 1, 2, 3, przy czym cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy. Uzasadnij, że takich liczb jest 15 360.

Zadanie 8. [2017 czerwiec SF, zad. 8. (4 pkt); NF zad. 9] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*
Z cyfr 0, 1, 2 tworzymy pięciocyfrowe liczby całkowite dodatnie podzielne przez 15. Oblicz, ile możemy utworzyć takich liczb.

Zadanie 9. [2017 maj SF, zad. 7. (4 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*
Oblicz, ile jest liczb sześciocyfrowych, w których zapisie nie występuje zero, natomiast występują dwie dziewiątki, jedna szóstka i suma wszystkich cyfr jest równa 30.

Zadanie 10. [2019 maj SF, zad. 6. (3 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*
Oblicz, ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że iloczyn wszystkich ich cyfr w zapisie dziesiętnym jest równy 28.

Zadanie 11. [2020 maj NF, zad. 13. (4 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*
Oblicz, ile jest wszystkich siedmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie trzy cyfry 1 i dokładnie dwie cyfry 2.

12. Rachunek Prawdopodobieństwa

Zadanie 1. [2014 czerwiec, zad. 11. (4 pkt)]
W urnie jest dziesięć kul: 4 białe, 3 czarne, 2 zielone i 1 niebieska. Losujemy jednocześnie trzy kule z urny. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wśród wylosowanych kul nie ma kul w tym samym kolorze. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Zadanie 2. [2014 grudzień, zad. 16. (5 pkt)]
Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że w trzykrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry otrzymamy co najmniej jedną „jedynkę”, pod warunkiem że otrzymamy co najmniej jedną „szóstkę”.

Zadanie 3. [2014 Informator, zad. 35. (5 pkt)]
Doświadczenie losowe polega na tym, że losujemy jednocześnie dwie liczby ze zbioru $\{1,2,3,...,12,13\}$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.

Zadanie 4. [2014 Informator, zad. 36. (3 pkt)]

Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A) = 0,7$ i $P(B) = 0,8$, to $P(A \mid B) \geq 0,625$.

$P(A \mid B)$ oznacza prawdopodobieństwo warunkowe.

Zadanie 5.[2014 Informator, zad. 37. (4 pkt)]

Wybieramy losowo jedną liczbę ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ i gdy otrzymamy liczbę n, to rzucamy n razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego orła. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Zadanie 6. [2014 Informator, zad. 38. (2 pkt)]

Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, to $P(A \cap B') = P(A)P(B')$.

B' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia B.

Zadanie 7. [2014 maj, zad. 11. (4 pkt)]

Z urny zawierającej 10 kul ponumerowanych kolejnymi liczbami od 1 do 10 losujemy jednocześnie trzy kule. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że numer jednej z wylosowanych kul jest równy sumie numerów dwóch pozostałych kul.

Zadanie 8. [2015 maj NF, zad. 11. (4 pkt)]

W pierwszej urnie umieszczono 3 kule białe i 5 kul czarnych, a w drugiej urnie 7 kul białych i 2 kule czarne. Losujemy jedną kulę z pierwszej urny, przekładamy ją do urny drugiej i dodatkowo dokładamy do urny drugiej jeszcze dwie kule tego samego koloru, co wylosowana kula. Następnie losujemy dwie kule z urny drugiej. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że obie kule wylosowane z drugiej urny będą białe.

Zadanie 9. [2015 maj SF, zad. 11. (3 pkt)]

Rozważmy rzut sześcioma kostkami do gry, z których każda ma inny kolor. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że uzyskany wynik rzutu spełnia równocześnie trzy warunki:

- dokładnie na dwóch kostkach otrzymano po jednym oczku;
- dokładnie na trzech kostkach otrzymano po sześć oczek;
- suma wszystkich otrzymanych liczb oczek jest parzysta.

Zadanie 10. [2016 czerwiec NF, zad. 7. (2 pkt)]

Dane są zdarzenia losowe $A, B \subset \Omega$ takie, że $P(A) = \frac{2}{7}$ i $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$. Oblicz $P(B \setminus A)$, gdzie zdarzenie $B \setminus A$ oznacza różnicę zdarzeń B i A. Zakoduj kolejno pierwsze trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 11. [2016 czerwiec SF, zad. 7. (4 pkt)]

Rzucamy czterokrotnie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy dokładnie dwie dwójki lub dokładnie dwie piątki. Wynik zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Zadanie 12. [2016 maj NF, zad. 6. (2 pkt)]

Wśród 10 tysięcy mieszkańców pewnego miasta przeprowadzono sondaż dotyczący budowy przedszkola publicznego. Wyniki sondażu przedstawiono w tabeli.

Badane grupy	Liczba osób popierających budowę przedszkola	Liczba osób niepopierających budowy przedszkola
Kobiety	5140	1860
Mężczyźni	2260	740

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że losowo wybrana osoba, spośród ankietowanych, popiera budowę przedszkola, jeśli wiadomo, że jest mężczyzną. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 13. [2016 maj SF, zad. 10. (5 pkt)]

W urnie znajduje się 20 kul: 9 białych, 9 czerwonych i 2 zielone. Z tej urny losujemy bez zwracania 3 kule. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że co najmniej dwie z wylosowanych kul są tego samego koloru.

Zadanie 14. [2017 maj NF, zad. 11. (4 pkt)]

W pudełku znajduje się 8 piłeczek oznaczonych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 8. Losujemy jedną piłeczkę, zapisujemy liczbę na niej występującą, a następnie zwracamy piłeczkę do urny. Tę procedurę wykonujemy jeszcze dwa razy i tym samym otrzymujemy zapisane trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania takich piłeczek, że iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego.

Zadanie 15. [2017 maj SF, zad. 8. (3 pkt)]

W dwóch pudełkach umieszczono po pięć kul, przy czym w pierwszym pudełku: 2 kule białe i 3 kule czerwone, a w drugim pudełku: 1 kulę białą i 4 kule czerwone. Z pierwszego pudełka losujemy jedną kulę i bez oglądania wkładamy ją do drugiego pudełka. Następnie losujemy jedną kulę z drugiego pudełka. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej z drugiego pudełka.

Zadanie 16. [2018 czerwiec NF, zad. 9.; SF zad.7. (4 pkt)]

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych ośmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry ze zbioru $\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$, losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma cyfr wylosowanej liczby jest równa 3.

Zadanie 17. [2018 maj NF, zad. 9. (4 pkt); SF zad.4]
Z liczb ośmioelementowego zbioru $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ tworzymy ośmiowyrazowy ciąg, którego wyrazy się nie powtarzają. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednimi wyrazami utworzonego ciągu. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Zadanie 18. [2019 maj NF, zad. 6. (6 pkt)]
Rozważamy wszystkie liczby naturalne pięciocyfrowe zapisane przy użyciu cyfr $1, 3, 5, 7, 9$, bez powtarzania jakiejkolwiek cyfry. Oblicz sumę wszystkich takich liczb.

Zadanie 19. [2019 maj SF, zad. 10. (3 pkt)]
Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy kolejno ze zwracaniem trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że dokładnie dwie spośród trzech wylosowanych liczb będą równe. Wynik zapisz w postaci ułamka nieskracalnego.

Zadanie 20. [2019 czerwiec NF, zad. 5. (2 pkt)]
W urnie znajduje się 16 kul, które mogą się różnić wyłącznie kolorem. Wśród nich jest 10 kul białych i 6 kul czarnych. Z tej urny losujemy dwukrotnie jedną kulę bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych.
Wpisz w poniższe kratki – od lewej do prawej – trzy kolejne cyfry po przecinku skończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 21. [2019 czerwiec SF, zad. 10. (4 pkt)]
W urnie jest dziesięć kul różniących się wyłącznie kolorem: 4 czarne, 3 białe, 2 zielone i 1 niebieska. Losujemy jednocześnie trzy kule z urny. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że przynajmniej dwie z wylosowanych kul mają ten sam kolor.

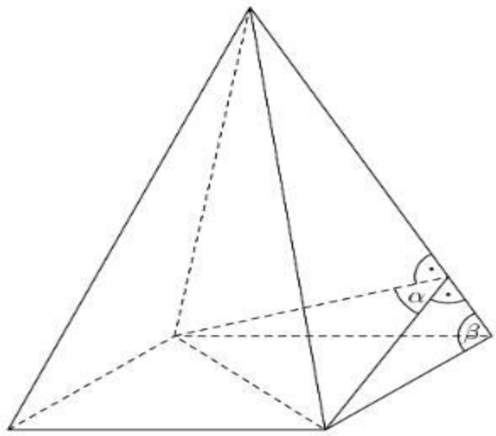
13. Stereometria

Zadanie 1. [2014 czerwiec, zad. 10. (5 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*
Podstawą ostrosłupa jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 25. Ściany boczne ABS i BCS mają takie same pola, każde równe 250. Ściany boczne ADS i CDS też mają jednakowe pola, każde równe $187{,}5$. Krawędzie boczne AS i CS mają równe długości. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 2. [2014 Informator CKE, zad. 26. (3 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Kąt α jest kątem między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi. Kąt β jest kątem przy podstawie ściany bocznej (tzn. kątem między krawędzią podstawy i krawędzią boczną ostrosłupa) – zobacz rysunek.

Wykaż, że $\cos\alpha \cdot \mathrm{tg}^2\beta = -1$.

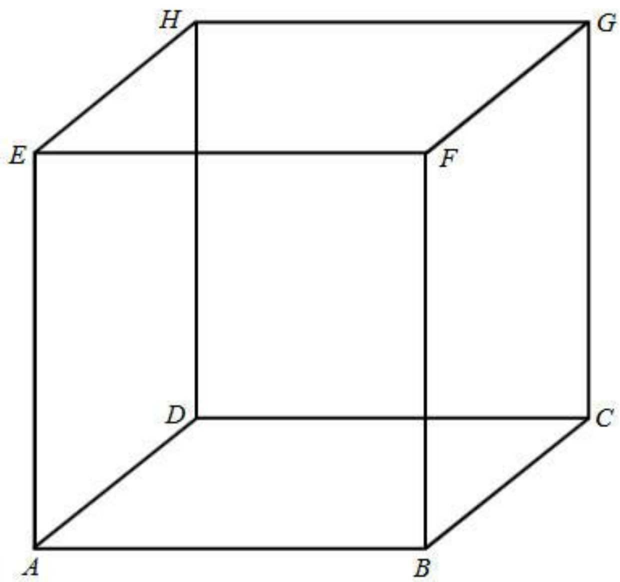


Zadanie 3. [2014 Informator CKE, zad. 27. (4 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a. Płaszczyzna przechodząca przez krawędź podstawy i środek wysokości tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

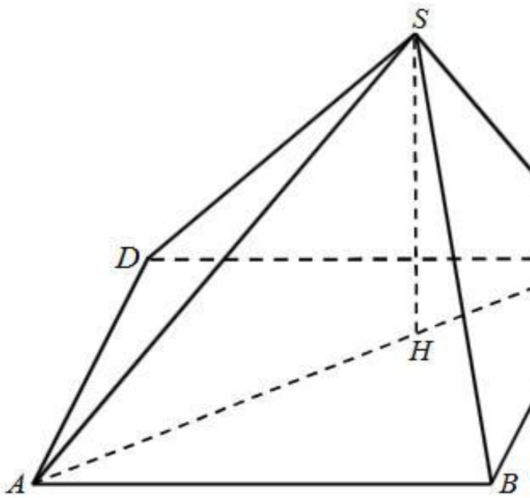
Zadanie 4. [2014 Informator CKE, zad. 28. (4 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek) o krawędzi równej 1. Punkt S jest środkiem krawędzi DH. Odcinek DW jest wysokością ostrosłupa $ACSD$ opuszczoną z wierzchołka D na ścianę ACS. Oblicz długości odcinków AW, CW i SW.



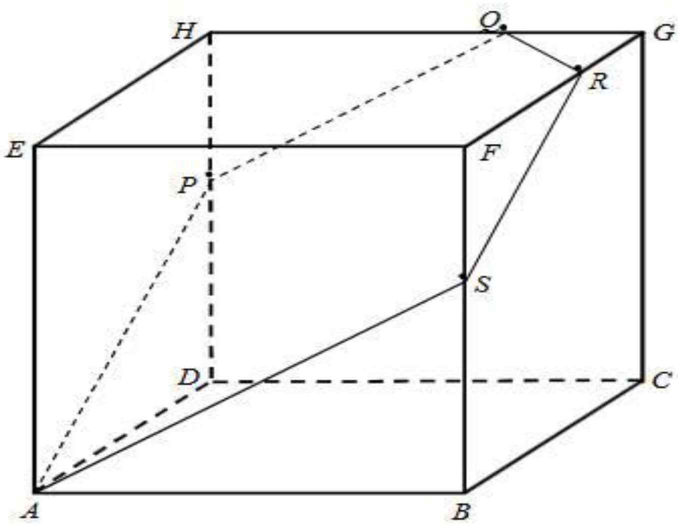
Zadanie 5. [2014 Informator CKE, zad. 29. (6 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Kwadrat $ABCD$ o boku długości 1 jest podstawą ostrosłupa $ABCDS$. Odcinek HS jest wysokością ostrosłupa, przy czym punkt H dzieli przekątną AC podstawy w stosunku $2:1$ (zobacz rysunek). Krawędzie boczne BS i DS mają długość równą 1. Oblicz objętość tego ostrosłupa oraz długości krawędzi AS i CS.

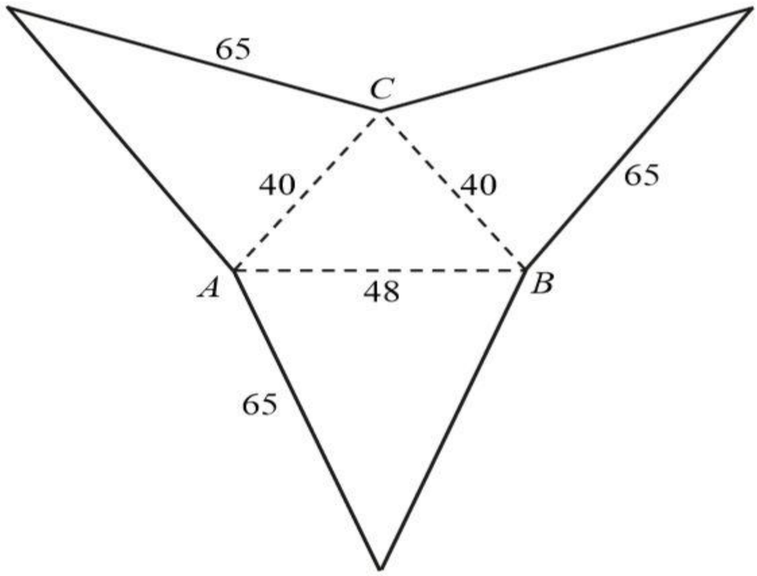


Zadanie 6. [2014 Informator CKE, zad. 30. (4 pkt)]

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek), którego krawędź ma długość 15. Punkty Q i R dzielą krawędzie HG i FG w stosunku $2:1$, to znaczy $|HQ| = |FR| = 10$. Płaszczyzna AQR przecina krawędzie DH i BF odpowiednio w punktach P i S. Oblicz długości odcinków DP i BS.



: Oblicz objętość ostrosłupa trójkątnego $ABCS$, którego siatkę przedstawiono na rysunku.



Zadanie 8. [2015 czerwiec NF, zad. 14. (5 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest trapez $ABCD$. Przekątna AC tego trapezu ma długość $8\sqrt{3}$, jest prostopadła do ramienia BC i tworzy z dłuższą podstawą AB tego trapezu kąt o mierze $30°$. Każda krawędź boczna tego ostrosłupa ma tę samą długość $4\sqrt{5}$. Oblicz odległość spodka wysokości tego ostrosłupa od jego krawędzi bocznej SD.

Zadanie 9. [2015 maj NF, zad. 14. (5 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest kwadrat $ABCD$. Krawędź boczna SD jest wysokością ostrosłupa, a jej długość jest dwa razy większa od długości krawędzi podstawy. Oblicz sinus kąta między ścianami bocznymi ABS i CBS tego ostrosłupa.

Zadanie 10. [2015 maj SF, zad. 10. (6 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCDS$ ma długość a. Ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy ostrosłupa pod kątem 2α. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną, która przechodzi przez krawędź podstawy i dzieli na połowy kąt pomiędzy ścianą boczną i podstawą. Oblicz pole powstałego przekroju tego ostrosłupa.

Zadanie 11. [2016 maj NF, zad. 15. (6 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDS$ o podstawie $ABCD$ wysokość jest równa 5, a kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa ma miarę $120°$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 12. [2016 czerwiec SF, zad. 12. (6 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Trójkąt ABC jest podstawą prawidłowego ostrosłupa $ABCS$, którego krawędź boczna ma długość 10. Punkt D jest środkiem wysokości SO ostrosłupa oraz $|AD| = 2\sqrt{13}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 13. [2016 maj SF, zad. 8. (6 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDS$ o podstawie $ABCD$ wysokość jest równa 5, a kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa ma miarę 120°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 14. [2017 czerwiec SF, zad. 7. (6 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt równoramienny o podstawie $|AB| = b$ i kącie α pomiędzy ramionami. Krawędź CD jest wysokością ostrosłupa, a kąt nachylenia ściany ABD do podstawy ostrosłupa jest równy β. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

Zadanie 15. [2017 maj NF, zad. 9. (4 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

W czworościanie, którego wszystkie krawędzie mają taką samą długość 6, umieszczono kulę tak, że ma ona dokładnie jeden punkt wspólny z każdą ścianą czworościanu. Płaszczyzna π, równoległa do podstawy tego czworościanu, dzieli go na dwie bryły: ostrosłup o objętości równej $\frac{8}{27}$ objętości dzielonego czworościanu i ostrosłup ścięty. Oblicz odległość środka S kuli od płaszczyzny π, tj. długość najkrótszego spośród odcinków SP, gdzie P jest punktem płaszczyzny π.

Zadanie 16. [2017 maj SF, zad. 10. (6 pkt)]

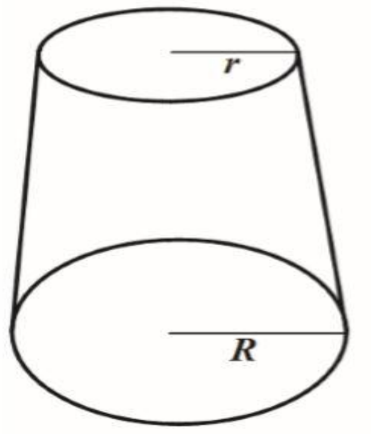
Przekątne sąsiednich ścian bocznych prostopadłościanu wychodzące z jednego wierzchołka tworzą z jego podstawą kąty o miarach $\frac{\pi}{3}$ i α. Cosinus kąta między tymi przekątnymi jest równy $\frac{\sqrt{6}}{4}$. Wyznacz miarę kąta α.

Zadanie 17. [2018 czerwiec SF, zad. 3. (5 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Podstawą ostrosłupa prawidłowego $ABCDS$ jest kwadrat $ABCD$. Punkt M jest środkiem odcinka AB, a punkt N jest środkiem odcinka BC. Trójkąt MNS jest równoboczny i jego bok ma długość m. Oblicz objętość ostrosłupa $ABCDS$ i kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa.

Zadanie 18. [2018 maj NF, zad. 10. (4 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Objętość stożka ściętego (przedstawionego na rysunku) można obliczyć ze wzoru $V = \frac{1}{3}\pi H\left(r^2 + rR + R^2\right)$, gdzie r i R są promieniami podstaw ($r < R$), a H jest wysokością bryły. Dany jest stożek ścięty, którego wysokość jest równa 10, objętość 840π, a $r = 6$. Oblicz cosinus kąta nachylenia przekątnej przekroju osiowego tej bryły do jednej z jej podstaw.



Zadanie 19. [2018 maj SF, zad. 11. (5 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

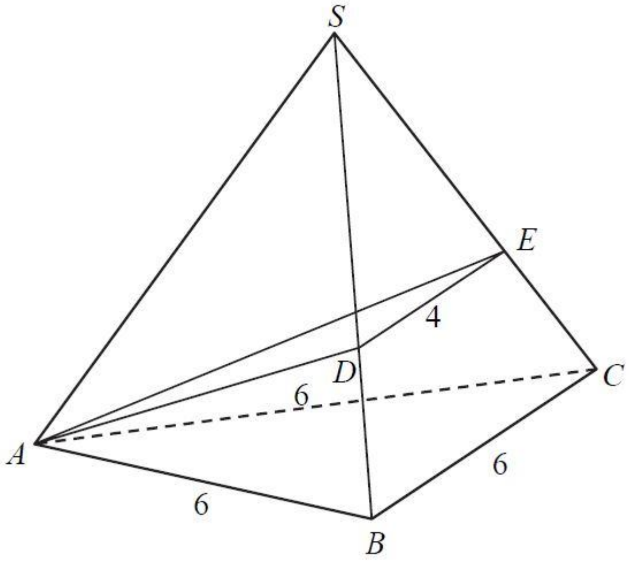
Przekrój ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$ płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek S i wysokości dwóch ścian bocznych jest trójkątem równobocznym. Krawędź boczna tego ostrosłupa ma długość $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 20. [2019 maj SF, zad. 11. (6 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest prostokąt $ABCD$, którego boki mają długości $|AB| = 32$ i $|BC| = 18$. Ściany boczne ABS i CDS są trójkątami przystającymi i każda z nich jest nachylona do płaszczyzny podstawy ostrosłupa pod kątem α. Ściany boczne BCS i ADS są trójkątami przystającymi i każda z nich jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem β. Miary kątów α i β spełniają warunek: $\alpha + \beta = 90°$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

Zadanie 21. [2019 czerwiec NF, zad. 11. (6 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Podstawą ostrosłupa prawidłowego $ABCS$ jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości 6. Na krawędziach bocznych BS i CS wybrano punkty, odpowiednio D i E, takie że $|BD| = |CE|$ oraz $|DE| = 4$ (zobacz rysunek). Płaszczyzna ADE jest prostopadła do płaszczyzny ściany bocznej BCS ostrosłupa.



Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 22. [2020 maj NF, zad. 14. (6 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Podstawą ostrosłupa czworokątnego $ABCDS$ jest trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Ramiona tego trapezu mają długości $|AD| = 10$ i $|BC| = 16$, a miara kąta ABC jest równa 30°. Każda ściana boczna tego ostrosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α, taki, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{9}{2}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

14. Zadania inne

Zadanie 1. [2014 grudzień NF, zad. 6. (2 pkt)]

Dane są liczby a, b takie, że $a - b = 4$ i $ab = 7$. Oblicz $a^3b + ab^3$. Zakoduj w kratkach poniżej kolejno, od lewej do prawej, cyfry setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Cyfra	setek	dziesiątek	jedności

Zadanie 2. [2016 maj SF, zad. 1. (3 pkt)]

Niech $\log_7 4 = a$. Wyznacz $\log_{\sqrt{2}} 49$ w zależności od a.

Zadanie 3. [2020 maj SF, zad. 1. (4 pkt)]

Rozwiąż nierówność $\left(\frac{1}{x} - 1\right)^{-1} \leqslant 1$.

15. Pochodne

Zadanie 1. [2014 grudzień NF, zad. 9. (2 pkt)]

Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\frac{x^2}{x-4}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 4$. Oblicz pochodną funkcji f w punkcie $x=12$.

Zadanie 2. [2014 grudzień NF, zad. 10. (3 pkt)]

Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=x^4$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz równanie prostej stycznej do wykresu funkcji f, która jest równoległa do prostej $y=4x+7$.

Zadanie 3. [2014 Informator CKE, zad. 12. (3 pkt)]

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=\frac{2x^4+15}{6-x^2}$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x, takich że $x \neq -\sqrt{6}$ i $x \neq \sqrt{6}$. Oblicz wartość pochodnej tej funkcji w punkcie $x=1$.

Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego obliczonego wyniku.

Zadanie 4. [2014 Informator CKE, zad. 13. (3 pkt)]

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=4x^3-2x+1$ dla wszystkich liczb rzeczywistych. Uzasadnij, że prosta l o równaniu $10x-y+9=0$ jest styczna do wykresu funkcji f.

Zadanie 5. [2015 maj NF, zad. 12. (4 pkt)]

Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=x^3-2x^2+1$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz równania tych stycznych do wykresu funkcji f, które są równoległe do prostej o równaniu $y=4x$.

Zadanie 6. [2017 maj NF, zad. 6. (3 pkt)]

Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $P=(1,0)$.

Zadanie 7. [2018 czerwiec NF, zad. 5. (2 pkt)]

Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$, określonej dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$, poprowadzonej w punkcie $A=\left(6,\frac{36}{5}\right)$ tego wykresu.

W poniższe kratki wpisz kolejno cyfrę jedności i dwie cyfry po przecinku skończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 8. [2018 maj NF, zad. 6. (3 pkt)]

Styczna do paraboli o równaniu $y=\sqrt{3}x^2-1$ w punkcie $P=(x_0,\ y_0)$ jest nachylona do osi Ox pod kątem $30°$. Oblicz współrzędne punktu P.

Zadanie 9. [2019 maj NF, zad. 5. (2 pkt)]

Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n^3+11n^2}{7n^3+5n^2+3n+1}-\frac{n^2}{3n^2+1}\right)$$

Wpisz w poniższe kratki – od lewej do prawej – trzy kolejne cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 10. [2019 maj NF, zad. 7. (2 pkt)]

Punkt $P=(10,2429)$ leży na paraboli o równaniu $y=2x^2+x+2219$. Prosta o równaniu kierunkowym $y=ax+b$ jest styczna do tej paraboli w punkcie P. Oblicz współczynnik b.

Zadanie 11. [2019 czerwiec NF, zad. 7. (2 pkt)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=\dfrac{25x^2-9}{x^2+2}$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

Oblicz wartość $f'(10)$ pochodnej tej funkcji dla argumentu 10.

16. Optymalizacja

Zadanie 1. [2014 grudzień, zad. 18. (7 pkt)]

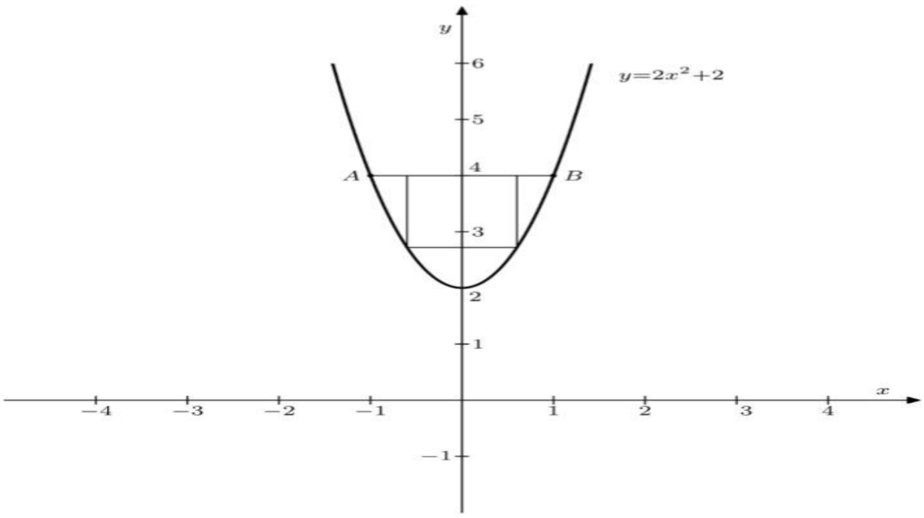
Okno na poddaszu ma mieć kształt trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa i ramiona mają długość po 4 dm. Oblicz, jaką długość powinna mieć dłuższa podstawa tego trapezu, aby do pomieszczenia wpadało przez to okno jak najwięcej światła, czyli aby pole powierzchni okna było największe. Oblicz to pole.

Zadanie 2. [2014 Informator CKE, zad. 14. (7 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Rozpatrujemy wszystkie ostrosłupy prawidłowe trójkątne, w których suma promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa i wysokości tego ostrosłupa jest równa 24. Wyznacz promień okręgu opisanego na podstawie tego z ostrosłupów, który ma największą objętość. Oblicz tę objętość.

Zadanie 3. [2014 Informator CKE, zad. 15. (7 pkt)]

Rozważamy wszystkie prostokąty, których dwa wierzchołki leżą na odcinku AB, gdzie $A=(-1,4)$ i $B=(1,4)$, a pozostałe dwa na paraboli o równaniu $y=2x^2+2$ (zobacz rysunek). Wyznacz wymiary tego z prostokątów, który ma największe pole. Oblicz to pole.



Zadanie 4. [2014 Informator CKE, zad. 16. (7 pkt)]

Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w których krótsza podstawa ma długość 5 i każde z ramion też ma długość 5. Oblicz długość dłuższej podstawy tego z rozpatrywanych trapezów, który ma największe pole. Oblicz to pole.

Zadanie 5. [2015 czerwiec NF, zad. 16. (7 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Rozpatrujemy wszystkie stożki, w których suma długości tworzącej i promienia podstawy jest równa 2. Wyznacz wysokość tego spośród rozpatrywanych stożków, którego objętość jest największa. Oblicz tę objętość.

Zadanie 6. [2015 maj NF, zad. 16. (7 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Rozpatrujemy wszystkie stożki, których przekrojem osiowym jest trójkąt o obwodzie 20. Oblicz wysokość i promień podstawy tego stożka, którego objętość jest największa. Oblicz objętość tego stożka.

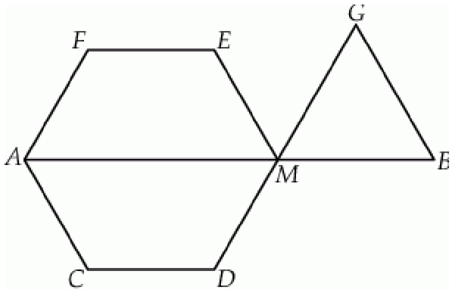
Zadanie 7. [2016 czerwiec NF, zad. 17. (7 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Rozpatrujemy wszystkie walce, których pole powierzchni całkowitej jest równe 2π. Oblicz promień podstawy tego walca, który ma największą objętość. Podaj tę największą objętość.

Zadanie 8. [2016 czerwiec SF, zad. 8. (5 pkt)]

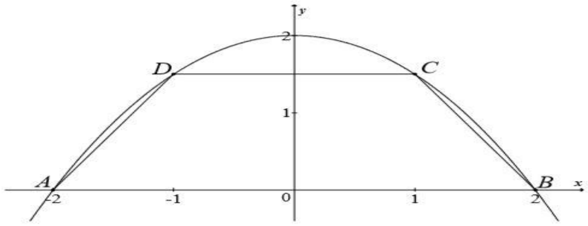
Dany jest odcinek AB o długości 10. Rozpatrujemy wszystkie sześciokąty foremne $ACDMEF$ i trójkąty równoboczne MBG, których wspólny wierzchołek M leży na odcinku AB (zobacz rysunek).

Oblicz stosunek obwodu sześciokąta do obwodu trójkąta w przypadku, gdy suma pól tych dwóch wielokątów jest najmniejsza.



Zadanie 9. [2016 maj NF, zad. 16. (7 pkt)]

Parabola o równaniu $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$ przecina oś Ox układu współrzędnych w punktach $A = (-2, 0)$ i $B = (2, 0)$. Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne $ABCD$, których dłuższą podstawą jest odcinek AB, a końce C i D krótszej podstawy leżą na paraboli (zobacz rysunek).



Wyznacz pole trapezu $ABCD$ w zależności od pierwszej współrzędnej wierzchołka C. Oblicz współrzędne wierzchołka C tego z rozpatrywanych trapezów, którego pole jest największe.

Zadanie 10. [2017 czerwiec NF, zad. 15. (7 pkt)]

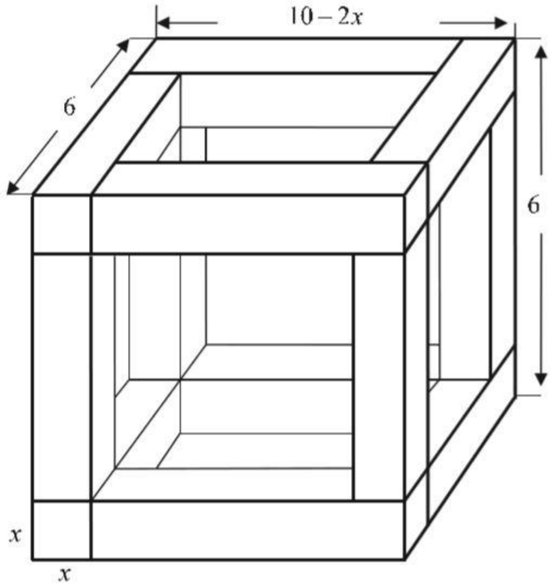
Rozpatrujemy wszystkie prostopadłościany o objętości 8, których stosunek długości dwóch krawędzi wychodzących z tego samego wierzchołka jest równy $1:2$ oraz suma długości wszystkich dwunastu krawędzi jest mniejsza od 28. Wyznacz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jako funkcję długości jednej z jego krawędzi. Wyznacz dziedzinę tej funkcji. Oblicz wymiary tego spośród rozpatrywanych prostopadłościanów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze.

Zadanie 11. [2017 maj NF, zad. 15. (7 pkt)] *(nie obowiązuje na maturze 2021)*

Rozpatrujemy wszystkie walce o danym polu powierzchni całkowitej P. Oblicz wysokość i promień podstawy tego walca, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość.

Zadanie 12. [2018 czerwiec NF, zad. 15. (7 pkt)]

Rozpatrujemy wszystkie możliwe drewniane szkielety o kształcie przedstawionym na rysunku, wykonane z listewek. Każda z tych listewek ma kształt prostopadłościanu o podstawie kwadratu o boku długości x. Wymiary szkieletu zaznaczono na rysunku.



a) Wyznacz objętość V drewna potrzebnego do budowy szkieletu jako funkcję zmiennej x.
b) Wyznacz dziedzinę funkcji V.
c) Oblicz tę wartość x, dla której zbudowany szkielet jest możliwie najcięższy, czyli kiedy funkcja V osiąga wartość największą. Oblicz tę największą objętość.

Zadanie 13. [2018 maj NF, zad. 15. (7 pkt)]

Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w które można wpisać okrąg, spełniające warunek: suma długości dłuższej podstawy a i wysokości trapezu jest równa 2.

a) Wyznacz wszystkie wartości a, dla których istnieje trapez o podanych własnościach.
b) Wykaż, że obwód L takiego trapezu, jako funkcja długości a dłuższej podstawy trapezu, wyraża się wzorem $L(a)=\frac{4a^2-8a+8}{a}$.
c) Oblicz tangens kąta ostrego tego spośród rozpatrywanych trapezów, którego obwód jest najmniejszy.

Zadanie 14. [2019 maj NF, zad. 15. (7 pkt)]

Rozważmy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o objętości $V=2$. Wyznacz długości krawędzi tego z rozważanych graniastosłupów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole.

Zadanie 15. [2019 czerwiec NF, zad. 15. (7 pkt)]

Dany jest okrąg o środku S i promieniu 18. Rozpatrujemy pary okręgów: jeden o środku S_1 i promieniu x oraz drugi o środku S_2 i promieniu $2x$, o których wiadomo, że spełniają jednocześnie następujące warunki:

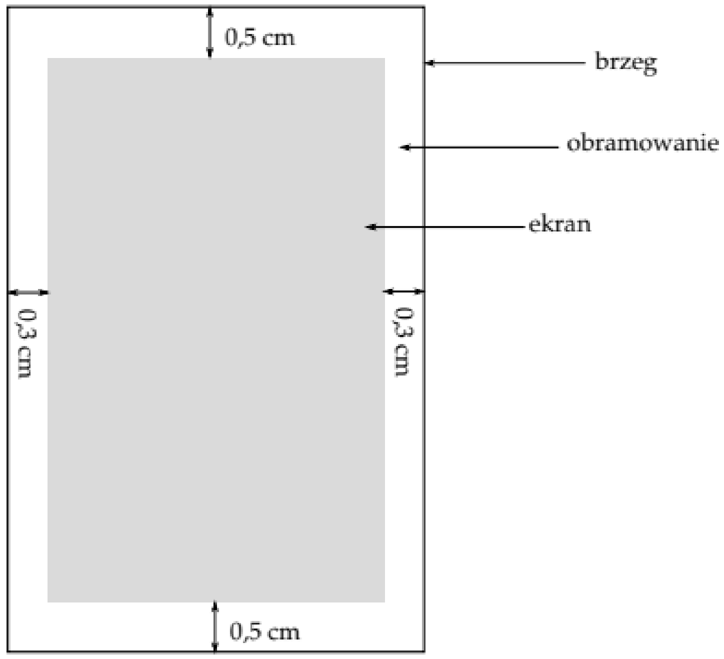
- rozważane dwa okręgi są styczne zewnętrznie;
- obydwa rozważane okręgi są styczne wewnętrznie do okręgu o środku S i promieniu 18;
- punkty: S, S_1, S_2 nie leżą na jednej prostej.

Pole trójkąta o bokach a, b, c można obliczyć ze wzoru Herona $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie p – jest połową obwodu trójkąta.

Zapisz pole trójkąta SS_1S_2 jako funkcję zmiennej x. Wyznacz dziedzinę tej funkcji i oblicz długości boków tego z rozważanych trójkątów, którego pole jest największe. Oblicz to największe pole.

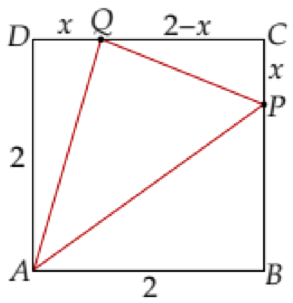
Zadanie 16. [2020 maj NF, zad. 15. (7 pkt)]

Należy zaprojektować wymiary prostokątnego ekranu smartfona, tak aby odległości tego ekranu od krótszych brzegów smartfona były równe 0,5 cm każda, a odległości tego ekranu od dłuższych brzegów smartfona były równe 0,3 cm każda (zobacz rysunek – ekran zaznaczono kolorem szarym). Sam ekran ma mieć powierzchnię 60 cm^2. Wyznacz takie wymiary ekranu smartfona, przy których powierzchnia ekranu wraz z obramowaniem jest najmniejsza.



Zadanie 17. [2020 maj SF, zad. 10. (5 pkt)]

Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 2. Na bokach BC i CD tego kwadratu wybrano – odpowiednio – punkty P i Q, takie, że długość odcinka $|PC| = |QD| = x$ (zobacz rysunek). Wyznacz tę wartość x, dla której pole trójkąta APQ osiąga wartość najmniejszą. Oblicz to najmniejsze pole.



ODPOWIEDZI

1.Funkcja Kwadratowa z Parametrem

1. $\left(0;\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)-\{1\}$ **2.** $(\sqrt[3]{4};4)-\{2\}$ **3.** $m\epsilon\left(-\frac{1}{6};0\right)\cup\left(4;\frac{9}{2}\right)$ **4.** $\left(\frac{8}{3};\frac{35}{13}\right)$

5. $(-\infty;-2)$ **6.** $m\epsilon(-6{,}5;-6)\cup(-6;-5{,}5)$ **7.** $<\frac{1}{4};0)\cup(2;\infty)$ **8.** $(-\infty;-3)\cup\left(\frac{3}{5};\frac{3}{4}\right)$

9. $(-\frac{4}{7},-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2};0>$ **10.** mϵ<2;3> **11.** m=$-\frac{9}{5}$ m=$\frac{1}{4}$

2.Wielomiany

1. $-1;-\frac{1}{3};\frac{1}{2}$ **2.** 1,6,6 **3.** $m=0;m=-3$

4. $a=-3;b=6;c=8;a=6;b=3;c-10;a=-12;b=39;c=-28$

5. $x\in\langle 3,4,5\rangle$ **6.** $m=-4\ n=24\ \ x\in<-3;1>\cup<4;\ \infty)$ **7.** 125 **8.** 2, $-\frac{5}{2}$; 3 a=-5 b=30

9. L= P **10.** $x\in\langle -4;-2\rangle\cup<3;\infty)$ $x=-4;x=-2,x=3$

11. $\frac{2}{5},\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $x\in\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{2}{5}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\infty\right)$ **12.** m=0 m=-1 m=1 / x=2 x=-3 x=$\frac{1}{2}$

3. Wykresy funkcji

1. $x\epsilon(-\infty;-2>U<2;\infty)$ **2.** $\frac{7}{39}$ **3.** -1<a<$\frac{5}{2}$ **4.** $1\frac{1}{7}<k<2$

5. 166 **6.** <0; ∞) **7.** ZW=$(-\infty$;3>

5. Ciągi

1. $a_h=7h-4$ **2.** q= $\sqrt[7]{4}$ **3.** L=P **4.** a=2 b=5 c=8 a=26 b=5 c=-16

5. a=2 b=6 c=18 a=18 b=6 c=2 **6.** a=3 b=12 c=48 **7.** $x_1=1$ **8.** n=37

9. $(\frac{4}{9},-\frac{20}{9},\frac{100}{9})$ (4, 12, 36) **10.** L=P **11.** a= 33 b=11 c=-11 a=9 b=11 c=13 **12.** 3,7,5

13. {-3,6,-12} $\{-\frac{7}{9},\frac{14}{9},-\frac{28}{9}\}$ **14.** 438 **15.** $\frac{\pi}{3}$ **16.** 0,31

17. S= $\frac{9}{4}$ **18.** 10^{100} **19.** 143 **20.** 3,6,12 ; -2,3,8

21. 923 **22.** $a_1=10$ **23.** 187 **24.** 17

25. a=2 b=6 c=8 , a=b=c=4 **26**. a_1=5 r=3 b_1=3 q=5 **27**. a=5 b=9 c=13 , a=$\frac{31}{2}$ b=9 c=$\frac{5}{2}$ **28**. aq=3

29.$\frac{2048\pi}{3}$ **30**. 32769 n=15 **31**. a(4,11,18) g(4,12,36) a(18,11,4) g(18,12,8) **32**. q=$\frac{1}{3}$

33. a=25 b=10 c=4 **34.** 2,6,18,54,162,486 **35**. a_1=3

6. Funkcja Trygonometryczne

1. x=$\frac{\pi}{4}$ x= $\frac{3\pi}{4}$ x= $\frac{5\pi}{4}$ x= $\frac{7\pi}{4}$ **2**.x∈($\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$) **3**. ($\frac{\pi}{6}$: $\frac{11\pi}{6}$) - {$\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$} **4**.$\frac{2\pi}{3}$ + 4π

5. $\frac{3\pi}{2}$ $\frac{7\pi}{6}$ $\frac{11\pi}{6}$ **6.** $x = \frac{3\pi}{4}$, x=$\frac{\pi}{4}$ **7**. $\frac{5\pi}{12}$ $\frac{13\pi}{12}$ **8**.π $\frac{2\pi}{3}$ $\frac{4\pi}{3}$

9. L = P **10**.$\frac{7\pi}{12}$ $\frac{11\pi}{12}$ $\frac{19\pi}{12}$ $\frac{23\pi}{12}$ **11**. $x = \frac{7\pi}{18}, x = \frac{11\pi}{18}, x =$0, x=$\frac{2\pi}{3}$ **12**. x = -$\frac{\pi}{6}$ x= $\frac{7\pi}{6}$

13. x=kπ lub x=$\frac{\pi}{3}$+2kπ lub x=-$\frac{\pi}{3}$+2kπ **14**. x=0, x=π, x=2π, x=$\frac{7\pi}{6}$, x=$\frac{11\pi}{6}$

15. x=$\frac{7\pi}{30}$, x=$\frac{19\pi}{30}$, x=$\frac{11\pi}{30}$, x=$\frac{23\pi}{30}$ **16**. x∈{$\frac{\pi}{2}$,$\frac{3\pi}{2}$,$\frac{\pi}{4}$,$\frac{3\pi}{4}$,$\frac{5\pi}{4}$,$\frac{7\pi}{4}$} **17**. x=$\frac{\pi}{6}$, x=$\frac{5\pi}{6}$

7. Wartość Bezwzględna

1. x∈<-11;-1> U<$\frac{17}{3}$;∞) **2**. n=107 **3**. 575 **4**. (-∞; -4> U <$\frac{16}{3}$; ∞)

5. (-∞; 1> U <3; ∞) **6.**<-8, -2> **7**. -13, 5 **8**. (-∞; 3> **9.**<-$\frac{9}{2}$; $\frac{11}{2}$> **10**. -10, 2

11. (-2;-1) u (3;4)

8. Planimetria

1. |AB| = 7.5 |BC|= 13,5 -5$\sqrt{5}$ |BO| + $\frac{15+\sqrt{21}}{4}$ **2.** $\frac{15}{17}$ **3.** 97

4 1:5 **5.**$\sqrt{145}$ **6.** $\sqrt{\frac{253}{13}}$ **7.**$\frac{\sqrt{3}}{4}$ **8.** $\frac{-1+\sqrt{7}}{4}$, $\frac{1+\sqrt{7}}{4}$

9. $\frac{1}{7}$ **10**. 10,5 **11.**12$\sqrt{3}$ **12**. R = 21$\frac{1}{8}$

13. 72 **14.**$\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ + a^2 **15**. 120 **16**. n=18 **17.** $\frac{43}{45}$ **18.** $\frac{1}{7}$

9. Geometria Analityczna

1. $x_a = 2$ $y_a = 0$ $X_b = 5\frac{1}{5}$ $Y_b = 2\frac{2}{3}$ **2**. S1(1,1) S2 (9,9), $8\sqrt{2}$ **3.** S (2,5) $y= (x-2)^2 + (y-5)^2 = 25$

4. $\frac{29}{5}\sqrt{5} - 10$ **5.** $y = \frac{3}{4}x - \frac{61}{14}$ **6.** $R = \frac{11}{35}$ **7.** $y = 2x+7-4\sqrt{7}$ $y= 2x+7+4\sqrt{7}$

8. C (6,12) **9.** C $(\frac{8}{3}; \frac{14}{3})$ **10**. $Y = 0$ $y=\frac{3}{4}x$ **11**. P = 10,5

12. $Y = -\frac{1}{2}x + 6$ $y = -\frac{1}{8}x + 3$ **13**. $S(0; \frac{1}{3})$ $r = \frac{17}{3}$ **14**. A (0,25) B(0,0) C(12,9)

15. $B(\frac{-17}{5},\frac{31}{5})$ **16.** a=6 **17**. $3\sqrt{10}$ **18**. $(x-10)^2 + (y-9)^2 = 153$

11. Kombinatoryka

1. 1050000 **2.** 5994 **3**. 896 **4.** 3778930

5. 44361 **6**. $6*5^5+16*5^4$ **7.** 3 **8.**18 **9**. 600

10. 147 **11**. 12960

12. Rachunek Prawdopodobieństwa

1. $\frac{5}{12}$ **2**. 30 **3**. $\frac{1}{6}$ **4**. 0,625

5. $\frac{17}{24}$ **6**. L = P **7.** $\frac{1}{6}$ **8**. $\frac{5}{11}$

9. $\frac{120}{66}$ **10**. $\frac{11}{35}$ **11**. $\frac{49}{316}$ **12**. 753

13. $d= \frac{163}{190}$ **14.** $\frac{11}{16}$ **15**. $\frac{7}{30}$ **16**. $\frac{11}{699840}$

17. 5! * 6*5*4 **18**. 6666600 **19**. $P(A)=\frac{8}{27}$ **20.** 3,7,5

21. $P(A)=\frac{7}{12}$

13. Stereometria

1. 2500 **3.** V= $\frac{a^3}{12}$* tg L Pb= $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ * $\sqrt{1+4tg^2}\ \alpha$ **4.** |AW| =|CW| =$\frac{\sqrt{30}}{6}$ |SW| =$\frac{\sqrt{3}}{6}$

5. V = $\frac{2}{9}$ |AS| = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ |CS| = $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **6.** |DP | = |BS| =9 **7.** 25 **8.** $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

9. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ **10.** $\frac{a}{b} = \frac{a}{x} => b = x$ **11.** $\frac{500}{3}$ **12.** $72\sqrt{3}$

13. $\frac{500}{3}$ **14.** V= $\frac{b^3 sin^2\alpha\ tgB}{24\ (1-cos\alpha)^2}$ P= ($\frac{b^2 sin\alpha}{4(1-cos\alpha)}$ * (1+ $\frac{1}{cosB}$+ $\frac{2tgB}{\sqrt{2}\ (1-cos\alpha)}$ **15.** d= $\frac{\sqrt{6}}{6}$ **16.** $\frac{\pi}{4}$

17. L = 45° **18.** $\frac{9}{\sqrt{106}}$ **19.** $\frac{32\sqrt{3}}{27}$ **20.** 1416 **21.** $18\sqrt{2}$

22. 624

14. Zadania inne

1. 210 **2.** $\frac{8}{a}$ 3. $(-\infty,0)\cup(0,\frac{1}{2})\cup(1,\infty)$

15. Pochodne

1. $\frac{3}{4}$ **2**. y=4x- **3**. 2,9,6 **5.** y=4x+$\frac{67}{27}$ oraz y=4x-7

6. y= $\frac{1}{2}$x-$\frac{1}{2}$ **7.** 096 **8.** P($\frac{1}{6}$; $\frac{\sqrt{3}-36}{36}$) **9.** 952

10. b=2019 **11.** $\frac{295}{2601}$

16. Optymalizacja

1. $12\sqrt{3}\ dm^2$ **2.** $V=512\sqrt{3}$ $r=16$ **3.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{3}$ $P=\frac{8\sqrt{3}}{9}$ **4.** 10 $P=\frac{75\sqrt{3}}{4}$

5. $V=\frac{32\sqrt{5}}{375}\pi$ **6.** $r=4$ $h=2\sqrt{5}$ $V=\frac{32\pi\sqrt{5}}{3}$ **7.** promień podstawy: $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $V=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$ **8.** $\frac{2}{3}$

9. $C(\frac{2}{3};\frac{16}{9})$ **10**. $P_c(a)=4a^2+\frac{24}{a}$ dla $a\in(1,2)$, długości krawędzi $\sqrt[3]{3}$, $2\sqrt[3]{3}$, $\frac{4\sqrt[3]{3}}{3}$

11. $r=\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$, $H=\sqrt{\frac{2P}{3\pi}}$, $V=\frac{P}{3}\cdot\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$ **12**. a) $V(x)=8(11-3x)x^2$ b) D: $x\in(0;\frac{5}{2})$ c) $V_{max}=V(\frac{22}{9})=\frac{42592}{243}$

13. a) $x\in(1;2)$ c) 1 **14.** $a=2$, $H=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $P_c=6\sqrt{3}$

15. $P(x)=6x\sqrt{18-3x}$ dla $x\in(0;6)$, $P_{max}=P(4)=24\sqrt{6}$ boki: *10, 12, 14*

16. *6 i 10* **17**. $x=1$ i $P=\frac{3}{2}$